

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab

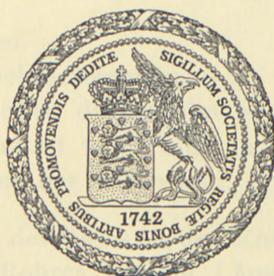
Matematisk-fysiske Meddelelser, bind 28, nr. 2

Dan. Mat. Fys. Medd. 28, no. 2 (1954)

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG  
ZWISCHEN DER LAMINAREN STRÖMUNG  
DER REINEN GASE DURCH ROHRE UND  
DEM SELBSTDIFFUSIONSKOEFFIZIENTEN

VON

SOPHUS WEBER



København

i kommission hos Ejnar Munksgaard

1954

Det Kongelige Danske Videnskabsnes Selskab  
Matematisk Fysiske Meddelelse, bind 22, no 2  
1921, p. 1-22

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG  
ZWISCHEN DER LAMINAREN STRÖMUNG  
DER REINEN GASE DURCH ROHRE UND  
DEN SELBSTDIFFUSIONSKOEFFIZIENTEN

JOHANNES WEBER



Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A-S.

§ 1. MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> hat 1909 seine grundlegenden Untersuchungen über die stationäre Strömung reiner Gase durch kreisförmige, zylindrische Rohre veröffentlicht; in dieser Untersuchung sind zum ersten Mal die Gesetze für die reine Molekularströmung theoretisch behandelt und durch experimentelle Resultate bestätigt worden; gleichzeitig wurde für die Gase: Wasserstoff, Sauerstoff und Kohlensäure, der Übergang der Molekularströmung in die POISEUILLE'sche, laminare Strömung experimentell untersucht, wodurch das Strömungsbild in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , experimentell festgelegt wurde.  $R$  bezeichnet den Radius des kreisförmigen Rohres, während  $\lambda$  die mittlere freie Weglänge des reinen Gases ist.

Die experimentellen Ergebnisse sind von MARTIN KNUDSEN durch die semi-empirische Formel:

$$Q_t = \left[ a\bar{p} + b \cdot \frac{1 + c_1 \cdot \bar{p}}{1 + c_2 \cdot \bar{p}} \right] (p_1 - p_2), \quad (1)$$

oder

$$Q_t = \left[ a\bar{p} + \frac{b}{1 + c_2 \cdot \bar{p}} + \frac{b \cdot c_1 \cdot \bar{p}}{1 + c_2 \cdot \bar{p}} \right] (p_1 - p_2), \quad (1 a)$$

wiedergegeben worden. —

In dieser Formel bezeichnen:

$Q_t$ : die in der Zeiteinheit durchströmende Gasmenge, gemessen durch das Produkt von Volumen,  $V$ , und Druck,  $\bar{p}$ , bei der Temperatur der Rohrwand,  $t$  °C.

$p_1$  und  $p_2$ : die Drucke des Gases an den Enden des kreisförmigen, zylindrischen Rohres mit der Länge,  $L$ ; ferner gilt:

$$p_1 > p_2, \quad \bar{p} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad \frac{(p_1 - p_2)}{\bar{p}} \ll 1, \quad \frac{R}{L} \ll 1.$$

1) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Physik 4, B 28, S. 75, 1909.

$a$ : Der Koeffizient des POISEUILLE'schen Ausdruckes, also:

$$a = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{R^4}{L},$$

$\eta$ : Der Koeffizient der inneren Reibung des reinen Gases bei der Temperatur,  $t^\circ\text{C}$ .

$b$ : Der Koeffizient der reinen Molekularströmung, also:

$$b = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L},$$

$1\varrho$ : das spezifische Gewicht des reinen Gases bei dem Druck,  $p = 1$  Bar., und der Temperatur,  $t^\circ\text{C}$ .

Alle Einheiten sind absolute Einheiten.

Die in der Zeiteinheit durchströmende Masse des Gases,  $G$ , in Gramm gemessen, wird also bestimmt durch:

$$1\varrho \cdot \frac{Q_t}{p_1 - p_2} = 1\varrho \cdot T_1 = G,$$

wenn die Druckdifferenz,  $p_1 - p_2 = 1$  Bar.

$c_1$  und  $c_2$  in der Formel (1) sind druckunabhängige Konstanten. Unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit der verschiedenen Messreihen und nach Ausgleichung hat MARTIN KNUDSEN aus allen Beobachtungen für die untersuchten Gase die folgenden Mittelwerte abgeleitet:

$$c_1 = 2,00 \cdot \frac{\sqrt{1\varrho}}{\eta} \cdot R \quad \text{und} \quad c_2 = 2,47 \cdot \frac{\sqrt{1\varrho}}{\eta} \cdot R.$$

Nach den Berechnungen von S. CHAPMAN<sup>1)</sup> und unter Verwendung der gewöhnlichen Terminologie<sup>2)</sup> ist:

$$\eta = 0,499 \cdot Nm \bar{\Omega} \lambda \simeq \frac{1}{2} \cdot Nm \bar{\Omega} \lambda,$$

1) S. CHAPMAN & T. G. COWLING: The mat. theory of non-uniform gases. (Cambr. Univ. Press) 1939.

2) Vgl.: J. H. A. TER HEERDT: Dissertatie, Utrecht, 1923.

und also:

$$p\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1\varrho}} = {}_1\lambda = {}_1\lambda_0 \left( \frac{273,1 + t}{273,1} \right)^{1+n}$$

In diesen Formeln sind:  $m$  die Masse des Moleküls,  $N$  die Anzahl der Moleküle per  $\text{cm}^3$  und  $\bar{\Omega}$  die mittlere Geschwindigkeit<sup>1)</sup> der Moleküle bei der Temperatur,  $t$ , während  ${}_1\lambda$  die mittlere freie Weglänge im Gase beim Druck 1 Bar. bezeichnet.

Wir werden nun die KNUDSEN'sche Formel (1) näher betrachten und in diese die CHAPMAN'sche freie Weglänge,  $\lambda$ , einführen; hieraus ergibt sich:

$$\frac{Q_t}{p_1 - p_2} = T_1 = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L} \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{1 + 2,00 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R}{\lambda}}{1 + 2,47 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R}{\lambda}} \right],$$

oder

$$\frac{Q_t}{p_1 - p_2} = T_1 = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L} \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{1 + 2,508 \cdot \frac{R}{\lambda}}{1 + 3,097 \cdot \frac{R}{\lambda}} \right], \quad (2a)$$

woraus erhellt, dass  $T_1$  in dem ganzen Druckgebiet eine eindeutige Funktion von  $\frac{R}{\lambda}$  ist. Wir erhalten auch aus (2 a) durch Umschreibung:

$$\frac{Q_t}{p_1 - p_2} = T_1 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \bar{p} \left[ 1 + \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{1 + 2,508 \cdot \frac{R}{\lambda}}{1 + 3,097 \cdot \frac{R}{\lambda}} \cdot 4 \frac{\lambda}{R} \right]. \quad (2b)$$

Aus (2 a) und (2 b) ergeben sich die folgenden Grenzwerte:

Für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$ :

$$T_{1 \rightarrow 0} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L} \left[ 1 - 0,442 \cdot \frac{R}{\lambda} + \dots \right],$$

1) Der Mittelwert einer Grösse wird durch einen horizontalen Strich über der Grösse angedeutet.

und für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ :

$$T_{1 \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \bar{p} \left[ 1 + k_2 \cdot 4 \frac{\lambda}{R} \right],$$

wo

$$k_2 = \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{2,508}{3,097} = \underline{1,375} = \text{ca. } \frac{4}{3}.$$

Für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  erhalten wir also den bekannten Ausdruck für die POISEUILLE'sche Strömung mit Gleitungskorrektion.

Der Gleitungskoeffizient:  $\zeta = k_2 \cdot \lambda$ , wird demnach aus den Messungen von KNUDSEN bestimmt zu:

$$\zeta = k_2 \cdot \lambda = 1,375 \cdot \lambda, \text{ übereinstimmend mit: } c_1/c_2 = 0,81.$$

Wenn  $c_1/c_2 = 0,785$ , ein Wert, welchen MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> auch für  $CO_2$  gefunden hat, wird  $\zeta = k_2 \cdot \lambda = 1,333 \cdot \lambda = \frac{4}{3} \cdot \lambda$ .

Aus der Formel (2), die das Beobachtungsmaterial von MARTIN KNUDSEN ziemlich befriedigend wiedergibt, erhellt, dass  $T_1$  einen Minimumwert,  $T_{1, \text{min.}}$ , hat für den Wert  $(R/\lambda)_{\text{min.}}$ . Auf bekannte Weise gelangt man, wenn:

$$\alpha' = 2,47 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3,097 \text{ und } \beta' = 2,00 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2,508,$$

zu:

$$\left( \frac{R}{\lambda} \right)_{\text{min.}} = \frac{1}{\alpha'} \left[ \frac{8}{\sqrt{3\pi}} \sqrt{\alpha' - \beta'} - 1 \right] = 0,323$$

und

$$T_{1, \text{min.}} = 0,952 \cdot T_{1,0}, \text{ oder } \frac{T_{1, \text{min.}}}{T_{1,0}} = 0,952.$$

Wird  $T_1$  als eine Funktion von  $R/\lambda$  graphisch dargestellt, sieht man, dass das Minimum ziemlich flach ist, so dass man leicht eine gute graphische Bestimmung der Grösse,  $T_{1, \text{min.}}$ , erhalten kann, während es schwieriger ist, durch eine graphische Darstellung die genaue Lage des Minimums, bzw.  $(R/\lambda)_{\text{min.}}$ , zu bestimmen; diesen Wert kann man also am besten mit Hilfe einer

1) Vgl. TER HEERDT, loc. cit. Seite 86.

guten Interpolationsformel für das Beobachtungsmaterial bestimmen. —

Die von MARTIN KNUDSEN aus seinem Versuchsmaterial bestimmten Werte von  $T_{1, \min.}$  und  $(R/\lambda)_{\min.}$  sind innerhalb der Messgenauigkeit in befriedigender Übereinstimmung mit den aus Formel (2) berechneten Werten, wenn in Betracht gezogen wird, dass MARTIN KNUDSEN in dieser Arbeit nicht die CHAPMAN'sche freie Weglänge,  $\lambda$ , sondern die O. E. MEYER'sche freie Weglänge,  $\lambda_{\text{Mey.}}$ , verwendet hat; wie bekannt, ist:

$$\lambda_{\text{Meyer}} = 1,615 \cdot \lambda_{\text{Chapman}}$$

Eine einwandfreie molekular-kinetische Erklärung für die Entstehung des Minimums, bzw. dessen gaskinetische Berechnung, und die theoretische Deutung der KNUDSEN'schen semiempirischen Formel ist mit Ausnahme der Grenzwerte für  $R/\lambda = 0$  (die reine Molekularströmung) und für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  (die laminare POISEUILLE-Strömung mit Gleitungskorrektur) bis jetzt nicht gegeben worden<sup>1)</sup>; ich werde im folgenden u. a. diese Probleme näher behandeln. —

§ 2. Aus der Formel (2) folgt, dass:

$$S = T_1 \sqrt{1^{\varrho}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{L}{R^3} = \frac{2}{3} \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{1 + 2,00 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R}{\lambda}}{1 + 2,47 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R}{\lambda}} \right],$$

oder:

$$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Dr. E. MELKONIAN<sup>2)</sup> hat aus sämtlichen Beobachtungen von MARTIN KNUDSEN, unter Verwendung der CHAPMAN'schen mittleren freien Weglänge,  $\lambda$ , die Grösse,  $S$ , für jede Beobachtung

1) MARTIN KNUDSEN: The kinetic Theory of Gases, Methuen & Co., Ltd., London, Seite 24, 1934.

2) E. MELKONIAN: Vgl. W. G. POLLARD und R. D. PRESENT: Phys. Rev. Vol. 73, 1948, Seite 762, bzw. Zeichnung, Seite 771 u. 772. Ferner: E. MELKONIAN: Manhattan Project Report M-1485, 11. Jan., 1945.

Auch bei dieser Gelegenheit möchte ich Dr. MELKONIAN für seine Mitteilungen, wie auch für die Überlassung der Tabelle I, meinen herzlichen Dank aussprechen.

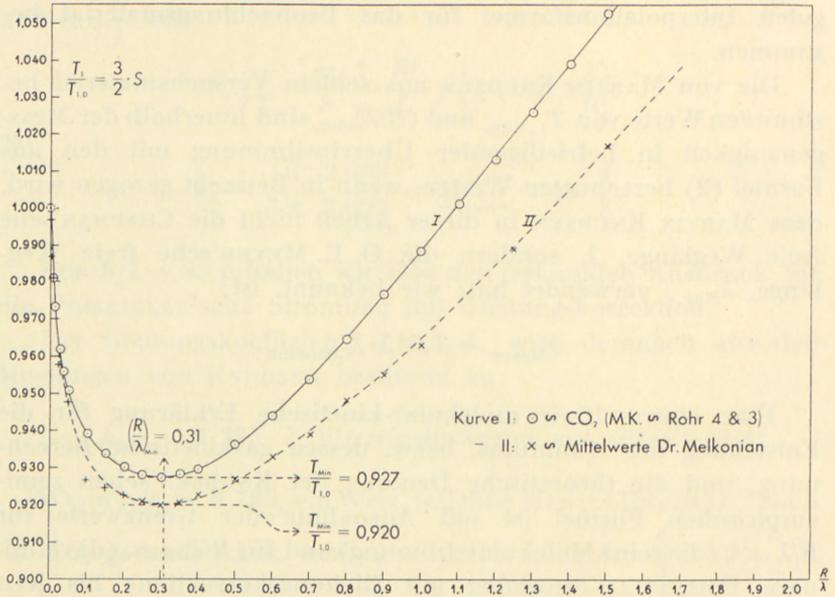


Fig. 1.

berechnet; die hierdurch erhaltenen Werte hat er für eine graphische Darstellung des ganzen Materials verwendet und die wahrscheinlichste, mittlere Kurve gezogen. In dieser Weise kann die Funktion  $S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$  mit  $\frac{R}{\lambda}$  als Abszisse dargestellt werden.

MELKONIAN hat aus dieser graphischen, ausgeglichenen Kurve die folgenden, korrespondierenden Werte bestimmt:

Tabelle I.

$\frac{R}{\lambda}$	$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$	$\frac{R}{\lambda}$	$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$	$\frac{R}{\lambda}$	$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$
0·0000	0.667	1·0	0·642	7.0	1·18
0·0001	.665	1·5	·678	10.0	1·44
0·001	.658	2·0	·717	20.0	2·44
0·01	.654	2·5	·763	50.0	5·34
0·05	.632	3·0	·805	100.0	10·4
0·10	.618	3·5	·853	200.0	20.6
0·20	.615	4.0	·903	400.0	39.9
0·50	.618	5.0	·996		

Dr. MELKONIAN hat mir mitgeteilt, dass für  $R/\lambda < 3$  alle beobachteten Werte weniger als 5 % von der mittleren Kurve abweichen; für  $R/\lambda > 3$  liegen die Beobachtungen viel näher an der mittleren Kurve. —

Verwenden wir die Werte der Tabelle I für eine graphische Darstellung, gelangt man leicht zu (vgl. Fig. 1, Kurve II):

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,310 \quad \text{und} \quad T_{1, \min.} = 0,920 \cdot T_{1,0},$$

und ausserdem  $k_2 = 1,33 = \text{ca. } \frac{4}{3}$ , und dementsprechend:  $c_1/c_2 = 0,785$ , also zu Werten, die innerhalb der Messgenauigkeit mit den Werten von KNUDSEN übereinstimmen.

Untersucht man die obenstehenden Mittelwerte von MELKONIAN näher, z. B. mit Hilfe einer graphischen Darstellung, stellt es sich heraus, dass diese Mittelwerte bei grösseren Werten von  $R/\lambda$ , d. h. in dem Gebiete der laminaren POISEUILLE-Strömung mit Gleitungskorrektur, nicht so regelmässig liegen, dass eine gute Bestimmung des Gleitungskoeffizienten vorgenommen werden kann. Diese Unregelmässigkeiten hängen wahrscheinlich damit zusammen, dass die KNUDSEN'schen Messreihen, insbesondere bei grösseren Werten von  $R/\lambda$ , bzw. bei grösserem Mitteldruck,  $\bar{p}$ , nicht gleichwertig sind; man hätte wahrscheinlich in der Mittelwertbildung, wenn möglich, den verschiedenen Messreihen verschiedenes Gewicht beilegen müssen. —

MARTIN KNUDSEN hat selber hierauf hingewiesen (loc. cit. S. 118 und S. 90) und hervorgehoben, dass die Messungen mit dem Rohr No. 4 (Bündel aus 24 Rohren) die besten sind; insbesondere gilt dies für die Messungen mit  $\text{CO}_2$ , auch bei höherem Mitteldruck, weil die Druckmessungen in diesem Falle, wegen der kleineren Durchströmungsgeschwindigkeit von  $\text{CO}_2$ , mit befriedigender Präzision ausgeführt werden konnten. Es erhellt weiter, dass diese Messungen mit dem Rohr No. 4 und die Messungen für  $\text{CO}_2$  mit dem Rohr Nr. 3 (Länge ca. 12 cm,  $R = \text{ca. } 0,01415$  cm) gute Übereinstimmung zeigen, insbesondere für  $R/\lambda < 0,6$ , so dass angenommen werden darf, dass dieses Material gut brauchbar ist. —

MARTIN KNUDSEN hat auch für die  $CO_2$ -Messungen mit Rohr Nr. 4 und Rohr Nr. 3 die druckunabhängigen Konstanten in seiner semi-empirischen Formel durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

Nach Neuberechnung und Kontrolle des KNUDSEN'schen Versuchsmaterials mit Rohr Nr. 4, bzw. Rohr Nr. 3, für Kohlen-säure und mit Hilfe der semi-empirischen Formel und graphischer Darstellungen haben sich mir die in der Tabelle II angegebenen Werte für  $S$  als die wahrscheinlichsten ergeben (vgl. Fig. 1, Kurve I.):

Tabelle II.

$\frac{R}{\lambda}$	$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$	$\frac{R}{\lambda}$	$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$	$\frac{R}{\lambda}$	$S = \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$
0.00	0.6667	0.80	0.6430	8.00	1.330
.01	.6540	0.90	.6505	9.00	1.428
.05	.6350	1.00	.6590	10.0	1.525
.10	.6260	1.50	.7020	20.0	2.506
.20	.6205	2.00	.7480	50.0	5.451
.30	.6180	3.00	.8430	100.0	10.359
.40	.6195	4.00	0.9395	200.0	20.175
.50	.6235	5.00	1.037	400.0	39.810
.60	.6295	6.00	1.134		
.70	.6360	7.00	1.232		

Hieraus ergibt sich (für Rohr Nr. 4):

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,310, \quad T_{1, \min.} = 0,925 \cdot T_{1,0}$$

und ausserdem  $c_1/c_2 = 0,812 \pm 0,06$ , woraus:

$$k_2 = 1,378,$$

während man auf diese Weise aus den Werten für  $CO_2$  mit dem Rohr Nr. 3 erhält:

$$c_1/c_2 = 0,785 \quad \text{und dementsprechend: } k_2 = 1,333 = \frac{4}{3}.$$

In diesen ersten Messungen von MARTIN KNUDSEN waren die gesättigten Quecksilberdämpfe im Versuchsapparat leider nicht entfernt, bzw. ausgefroren, so dass es nicht ganz ausgeschlossen

erscheint, dass die durchströmende Gasmenge,  $G$ , bei den aller-niedrigsten Werten von  $R/\lambda$  hierdurch beeinflusst worden ist, weil in diesem Gebiet der Einfluss des gesättigten Quecksilberdampfes bei der Temperatur des Strömungsrohres — ca.  $25^\circ \text{C}$ . — gegen-über dem Mitteldruck,  $\bar{p}$ , des reinen Gases, nicht ganz vernach-lässigt werden kann. Zur Orientierung kann erwähnt werden, dass der Quecksilberdampfdruck bei  $25^\circ \text{C}$ . ca. 0,00181 mm Hg oder ca. 2,4 Bar. beträgt. Es ist also möglich, dass in einzelnen Messreihen die gemessenen Werte von  $T_1$  in der Nähe der reinen Molekularströmung, d. h.  $R/\lambda \geq 0$ , zu niedrig ausgefallen sind. Bei dem Rohr Nr. 4 ist es aber ausgeschlossen, dass die Lage und die Grösse des Minimums hierdurch nennenswert beeinflusst worden sein können, weil der Mitteldruck  $\bar{p}$  von  $\text{CO}_2$  bei dem Minimum  $\left(\frac{R}{\lambda} = 0.31\right)$  ca. 0,33 mm Hg oder ca. 450 Bar. betrug.

Die Frage nach dem Einfluss der Quecksilberdämpfe ist aber sowohl von MARTIN KNUDSEN als auch von W. GAEDE in gesonderten Experimenten näher untersucht worden.

MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> wollte in erster Linie untersuchen, ob die Anwesenheit von Quecksilberdampf<sup>2)</sup> in seinen ersten Untersuchungen die Lage und die Grösse des Minimums beein-flusst hatte, während GAEDE<sup>3)</sup> auch in Verbindung mit seinen Strömungsergebnissen für einen rechteckigen Spalt festzustellen wünschte, ob der beobachtete Grenzwert,  $T_{1,0}$  für  $\frac{R}{\lambda} = 0$ , für kreisförmige, zylindrische Rohre, genau mit der theoretischen Formel von MARTIN KNUDSEN, bezw. von M. VON SMOLUCHOWSKI<sup>4)</sup>, übereinstimmte.

MARTIN KNUDSEN verwendete bei seiner Präzisionsunter-suchung (1911) Wasserstoff; die Länge des Strömungsrohres war:  $L = 29,81 \text{ cm}$  und der Radius  $R = 9,729 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ , also  $\frac{2R}{L} = 0,000653$ ; die Temperatur des Strömungsrohres wurde durch ein Wasserbad auf  $26,25^\circ \text{C}$  gehalten. Das Strömungs-rohr war an beiden Enden glatt abgeschnitten, und der Queck-

1) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. 4, 35, S. 389, 1911.

2) WILLARD J. FISCHER: Phys. Rev. XXXI, No. 5, S. 586, 1910.

3) W. GAEDE: Ann. d. Phys. 4, 41, S. 289, 1913.

4) M. VON SMOLUCHOWSKI: Ann. d. Phys. 33, S. 1559, 1910.

silberdampf und andere eventuelle Dämpfe im Apparat wurden während der Messungen, deren jede ca. 48 Stunden dauerte, auf einwandfreie Weise durch flüssige Luft ausgefroren.

Die Resultate sind in der Tabelle III wiedergegeben:

Tabelle III.

$\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ = $\bar{p}$ (Bar.)	$\frac{R}{\lambda}$	$T_{1, \text{beob.}}$	$T_{1, \text{berech.}}$
0	0	0·01160*	0·01148
32.26	0.0323	0·01152	0·01134
133.5	0.105	0·01117	0·01124
	0.322	0·01080*	0·01094 ~ Min.
520.2	0.402	0·01099	0·01095
970,2	0.750	0·01127	0·01123

Die mit \* versehenen Werte sind interpoliert.

In Kolonne 1 ist der mittlere Druck  $\bar{p}$  angegeben; in Kolonne 2 das Verhältnis  $R/\lambda$ , und in den Kolonnen 3 und 4 die beobachteten und berechneten Werte nach der KNUDSEN'schen semi-empirischen Formel (2). In der Kolonne 3 sind ferner die graphisch interpolierten Werte für  $R/\lambda = 0$  und  $R/\lambda = 0,322$  angegeben. Es erhellt hieraus, dass die Lage und die Grösse des Minimums bestimmt sind durch:

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\text{min.}} = 0,322 \text{ und } T_{1, \text{min.}} = 0,935 \cdot T_{1,0},$$

also in befriedigender Übereinstimmung mit den früheren Beobachtungsergebnissen bei den Messreihen, worin der Quecksilberdampf nicht ausgefroren war.

In Verbindung mit den Resultaten, die sich W. GAEDE aus seinen Strömungsuntersuchungen mit einem kurzen, rechteckigen Spalt ergeben hatten, schien es ihm zweifelhaft, ob ein konstanter, oberer Grenzwert für  $R/\lambda = 0$  vorhanden sei, und er hielt es für möglich, dass die Konstanz der Werte von  $T_1$  bei den niedrigsten

Drucken in den KNUDSEN'schen Beobachtungsreihen vielleicht der Anwesenheit von Quecksilberdampf oder anderen Dämpfen zugeschrieben werden müsse.

GAEDE hat darum die Strömungsversuche KNUDSEN's mit kreisförmigen, zylindrischen Rohren für  $R/\lambda \geq 0$  und unter Verwendung von sehr reinem Wasserstoff und Stickstoff wiederholt und auf diese Messungen, bezw. auf das Ausfrieren des Quecksilberdampfes, auf die Herstellung eines konstanten und sehr hohen Vacuums, auf die Messung der niedrigsten Drucke u. s. w. alle Sorgfalt und Präzision verwendet.

Die Strömungskapillare hatte eine Länge,  $L$ , von 5,67 cm und einen Radius,  $R$ , von 0,02064 cm im Mittel, also  $2R/L = \text{ca. } 0,0073$ . Die konischen Erweiterungen an den Enden der Kapillare wurden genau ausgemessen; sie erhöhten den Strömungswiderstand der Kapillare um 3 ‰, so dass die beobachteten Werte von  $T_1$  um 3 ‰ erhöht werden müssen, um einen Vergleich mit der KNUDSEN'schen Formel für  $R/\lambda = 0$  zu ermöglichen. Die Temperatur,  $t$ , der Rohrwand war in den Versuchen mit Wasserstoff, 18° C., und in den Versuchen mit Stickstoff, 16° C. Die Resultate von GAEDE sind in der Tabelle IV wiedergegeben.

Tabelle IV.

$\text{H}_2, (p\lambda)_t = 12,19, \quad t = 18^\circ \text{C.}$				$\text{N}_2, (p\lambda)_t = 6,25, \quad t = 16^\circ \text{C.}$			
$\bar{p}$ m. m. Hg.	$\bar{p}$ Bar.	$R/\lambda$	$T_1$	$\bar{p}$ m. m. Hg.	$\bar{p}$ Bar.	$\frac{R}{\lambda}$	$T_1$
0·007	9,31	0·01580	0·538	0·008	10,64	0·0350	0·1431
·003	4,00	·00676	·543	·006	8,00	·0264	·1438
·001	1,33	·00225	·546	·003	4,00	·0132	·1473
·0009	1,20	·00203	·554	·0023	3,06	·0101	·1484
·0008	1,06	·00179	·555	·0012	1,60	·0053	·1497
·0007	0,93	·00157	·552	·0006	0,80	·0026	·1511
·00055	0,73	·00124	·546	·00046	0,60	·0020	·1498
·00050	0,67	·00113	·550	·00034	0,45	·0015	·1516
·00040	0,53	·00090	·551	·00025	0,33	·0011	·1511
·00028	0,37	·00063	·551				
·00026	0,35	·00059	·554				
·00023	0,31	·00052	·547				
·00019	0,25	·00042	·551				

Hieraus ergibt sich für  $R/\lambda = 0$ :

Für  $H_2$  (Wasserstoff):  $T_{1,0}$  (beob.) =  $0,551 + 3\%$  =  $0,568$ ,

während man aus der KNUDSEN'schen Formel für die reine Molekularströmung:

$$T_{1,0} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L},$$

erhält:

$$T_{1,0} \text{ (ber.)} = 0,5684.$$

Für  $N_2$  (Stickstoff) ergibt sich auf dieselbe Weise:

$$T_{1,0} \text{ (beob.)} = 0,1508 + 3\% = 0,1553,$$

während:

$$T_{1,0} \text{ (ber.)} = 0,1520.$$

Aus dieser Untersuchung erhellt, dass die bei den niedrigsten Werten von  $R/\lambda$  beobachteten Werte von  $T_{1 \rightarrow 0}$  konstant sind, und dass die beobachteten und berechneten Werte befriedigend übereinstimmen.

Nach Auswertung erhalten wir aus der Tabelle IV die folgenden Werte:

Tabelle V.

$R/\lambda$	$T_1/T_{1,0}$	$T_1/T_{1,0}$
	$H_2$	$N_2$
0·000	1·000	1·000
0·010	0·982	0·983
0·015	0·972	0·975
0·025		0·958
0·035		0·944

In Verbindung mit der theoretischen Berechnung dieser Werte werde ich später auf diese Tabelle zurückkommen. —

Der theoretische Wert von  $T_{1,0}$ , d. h. die durchströmende Menge in der reinen Molekularströmung, für welche  $R/\lambda = 0$  gesetzt werden kann, ist abhängig von dem Zurückwerfungsgesetz der Moleküle an der festen Wand. Unter Voraussetzung der

absoluten Gültigkeit des Cosinusetzes hat MARTIN KNUDSEN den theoretischen Ausdruck:

$$T_{1,0} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L} \quad \text{für} \quad \frac{R}{\lambda} = 0,$$

abgeleitet.

Setzt man aber in Übereinstimmung mit MAXWELL<sup>1)</sup> voraus, dass ein Teil,  $f$ , der gegen die Wand stossenden Moleküle nach dem Cosinusetz von der Wand zurückgeworfen wird, und der übrigbleibende Teil  $(1-f)$  spiegelnd von der Wand zurückgeworfen wird, erhält man:

$$T'_{1,0} = \frac{2-f}{f} \cdot T_{1,0} = \frac{2-f}{f} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot \frac{R^3}{L}.$$

Wäre z. B. der Wert von  $(1-f) = 0,02$ , so hätte sich als beobachteter Wert für  $H_2$  in der KNUDSEN'schen Präzisionsuntersuchung ca. 0,0120 anstatt 0,0115 für  $R/\lambda = 0$  ergeben müssen und in dem GAEDE'schen Versuch als  $T_{1,0} = 0,591$  anstatt  $T_{1,0} = 0,568$ ; eine so grosse Abweichung in den Beobachtungen darf aber als ausgeschlossen betrachtet werden.

In dieser Verbindung kann vollständigkeithalber auch erwähnt werden, dass es nach den theoretischen Untersuchungen von W. GAEDE<sup>2)</sup>, P. EPSTEIN<sup>3)</sup> und P. CLAUSING<sup>4)</sup> zu erwarten ist, dass das Cosinusetz für die Zurückwerfung der Moleküle von der Wand gelten muss in einem Raum, worin Temperatur- und Druckgleichgewicht herrschen; es kann dann auch angenommen werden, dass das Cosinusetz, jedenfalls mit grosser Annäherung, gültig ist in einem durch ein Rohr stationär strömenden Gas, worin nur ein kleiner Druckgradient vorhanden ist, d. h. wenn  $\frac{p_1 - p_2}{L} \cdot \frac{1}{\bar{p}} \rightarrow 0$ .

Am Ende dieser Übersicht über das vorliegende experimentelle Material kann vollständigkeithalber noch erwähnt werden, dass HIROSHI ADZUMI<sup>5)</sup> 1939 eine orientierende Untersuchung

1) Vgl. z. B.: EARLE H. KENNARD: Kinetic Theory of Gases: S. 306, New York, 1938, und: LEONARD B. LOEB: The kinetic Theory of Gases: S. 325, New York, 1934.

2) W. GAEDE: Ann. d. Phys. 4, 41, S. 331, 1913.

3) P. EPSTEIN: Phys. Rev. 23, S. 710, 1924.

4) P. CLAUSING: Ann. d. Phys. 4, S. 533, 1930.

5) HIROSHI ADZUMI: Bulletin of the Chem. Soc. of Japan: Vol. 14, S. 343, 1939.

über das Durchströmen von Wasserstoff durch Metallkapillare durchgeführt hat, hauptsächlich bei niedrigen Drucken.

ADZUMI verwendete Kapillare von Silber, Aluminium, Kupfer und Eisen. Aus diesen Versuchen, die nur als orientierende Experimente betrachtet werden können, weil die Quecksilberdämpfe nicht ausgefroren waren und weil die Messgenauigkeit nicht sehr gross war, geht hervor, dass kein prinzipieller Unterschied zwischen den Resultaten mit Glas- und Metallkapillaren besteht; dies wäre auch nicht zu erwarten. Untenstehend sind die von mir, nach graphischer Ausgleichung der Versuchsergebnisse von ADZUMI, gefundenen Resultate wiedergegeben:

1° Silberkapillare;  $L = 7,70$  cm,  $R = 0,027$  cm,

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,31, \quad T_{1, \min.} = 0,98 \cdot T_{1,0}$$

2° Aluminiumkapillare;  $L = 5,40$  cm,  $R = 0,029$  cm,

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,31, \quad T_{1, \min.} = 0,92 \cdot T_{1,0}$$

3° Kupferkapillare;  $L = 9,80$  cm,  $R = 0,030$  cm,

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,32, \quad T_{1, \min.} = 0,905 \cdot T_{1,0}$$

4° Eisenkapillare;  $L = 9,96$  cm,  $R = 0,029$  cm,

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,32, \quad T_{1, \min.} = 0,870 \cdot T_{1,0}$$

Die Temperatur des Strömungsrohres war in diesen Versuchen, worin Wasserstoff verwendet wurde:  $t = 15,5^\circ$  C.

Hieraus erhellt, dass die Lage des Minimums, bezw. der Wert von:  $(R/\lambda)_{\min.}$ , mit dem Resultat der KNUDSEN'schen Messungen übereinstimmt; dies gilt auch der Grössenordnung nach für die Grösse des Minimums, weil die Genauigkeit dieser Messungen von ADZUMI nur auf 5 à 10 % geschätzt werden darf.

Von den theoretischen Arbeiten über die Molekularströmung der Gase muss ausser den älteren Arbeiten<sup>1)</sup> von MARTIN KNUD-

1) Vgl. u. a.: J. H. A. TER HEERDT, Dissertatie, Utrecht, 1923.

SEN und M. VON SMOLUCHOWSKI über die reine Molekularströmung insbesondere die spätere interessante Arbeit von W. G. POLLARD und R. D. PRESENT<sup>1)</sup> erwähnt werden.

POLLARD und PRESENT (im folgenden zitiert als P. und P.) lenken die Aufmerksamkeit darauf, dass die reine Molekularströmung als die untere Grenze, d. h. der Grenzwert für  $R/\lambda = 0$ , einer Diffusionsströmung in einem Kapillarrohr aufgefasst werden muss; sie nennen diese Diffusionserscheinung »Wanddiffusion«.

Ausgehend von diesem Wanddiffusionszustand berechnen sie den Einfluss der gegenseitigen Zusammenstöße der Moleküle auf die Molekularströmung und erhalten hierdurch den Ausdruck für die von mir in dieser Abhandlung genannte Druckdiffusionsströmung (CHAPMAN), bezw. für reine Gase Selbstdiffusionsströmung.

Sie gewinnen auf diese Weise eine theoretische Formel für die Variation dieser Strömung durch ein Kapillarrohr mit dem Druck  $\bar{p}$  des Gases, bezw. für die Variation des Selbstdiffusionskoeffizienten,  $D_{11,p}$ , mit dem Wert von  $R/\lambda$ . Um numerische Werte zu erhalten, sind die Werte der in der Formel vorkommenden bestimmten Integralen durch numerische Integration für mehrere Werte von  $\frac{R}{\lambda}$  berechnet, wodurch die theoretische Kurve ( $D_{11,p}$ ,  $R/\lambda$ ) gezeichnet werden könnte (Fig. 2, Seite 771, Abh. P. und P.).

Es erhellt hieraus, dass diese Kurve annäherungsweise mit der laut P. und P. von C. H. BOSANQUET<sup>2)</sup> angegebenen Interpolationsformel für  $D_{11,p}$  in einem Kapillarrohr:

$$\frac{1}{D_{11,p}} = \frac{1}{D_{11,0}} + \frac{1}{D_{11,p \rightarrow \infty}}, \quad \text{übereinstimmt.}$$

Ausserdem untersuchten P. und P. den Einfluss der endlichen Länge,  $L$ , des Strömungsröhres auf den Diffusionskoeffizienten,  $D_{11,p \rightarrow 0}$ , also in dem Zustande, charakterisiert durch:

$$R \ll L \ll \lambda, \quad \text{wo } \lambda \rightarrow \infty.$$

*P. und P. haben aber nicht damit gerechnet*, dass die von gegenseitigen Zusammenstößen kommenden Moleküle im In-

1) W. G. POLLARD und R. D. PRESENT. Phys. Rev., Vol. 73, S. 762, 1948.

2) Vgl. P. und P. loc. cit., Seite 770 (C. H. BOSANQUET: British T. A. Report BR — 507, September 27, 1944).

neren des Rohres eine gemeinschaftliche Massengeschwindigkeit (zusätzliche Geschwindigkeit),  $v_x$ , in der Richtung des Druckgradienten erhalten haben, wodurch die von mir in dieser Arbeit genannte »Gleitungsströmung« entsteht.

Im Laufe dieser Arbeit werde ich mehrmals auf die Untersuchung von P. und P. zurückkommen und die Resultate von P. und P. mit einigen der von mir erhaltenen Resultate vergleichen, insoweit diese miteinander vergleichbar sind. —

§ 2. Wie bekannt, geht bei grösseren Werten von  $R/\lambda$ , bzw.  $\lambda/R \rightarrow 0$ , die Molekularströmung von KNUDSEN in einem langen Kapillarrohr in die hydrodynamische, laminare Strömung von POISEUILLE über; für diesen Grenzfall wird, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Gases an der Rohrenwand,  $v_w$ , gleich Null gesetzt wird, die pro Sekunde durchströmende Gasmenge bestimmt durch die Formel:

$$G(p_1 - p_2) = \nu \cdot T_{1, \infty} (p_1 - p_2) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\nu}{\eta} \cdot \frac{R^4}{L} \bar{p} (p_1 - p_2). \quad (4)$$

Ausgehend von dem obengenannten Grenzzustand, bzw.  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , muss diese Formel für  $G$ , wenn der Wert von  $R/\lambda$  kleiner wird, nach den Untersuchungen von KUNDT und WARBURG<sup>1)</sup> für die Gleitung des strömenden Gases an der festen Rohrwand korrigiert werden, d. h. in diesem Falle darf in der Ableitung der Formel (4) für  $G$  die Strömungsgeschwindigkeit des Gases an der Wand und parallel mit dieser,  $v_w$ , nicht mehr vernachlässigt werden.

Nach KUNDT und WARBURG kann in diesem Zustande für die Geschwindigkeit,  $v_w$ , angenommen werden:

$$v_w = \zeta \cdot \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\rightarrow \text{Wand}} = \zeta \cdot \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r \geq R} \quad (5)$$

$(dv/dr)_{r \geq R}$  ist der Geschwindigkeitsgradient des Gases an der festen Wand in der Richtung der Normale dieser Wand;  $(dv/dr)_{r \geq R}$  muss dicht an der Wand, aber im vollen Gase genommen werden, d. h. dort, wo der Geschwindigkeitsgradient nicht mehr durch die an der Wand zurückgeworfenen Moleküle beeinflusst ist, also an der Stelle, wo  $(dv/dr)_{r \geq R}$  von dem Zurückwer-

1) A. KUNDT und E. WARBURG: Pogg. Ann., Bd. 155, S. 337 und 525, 1875.

fungsgesetz der Moleküle an der Wand unabhängig geworden ist; dies wird in einem Abstände von der Wand, der einigen freien Weglängen des Gases entspricht, der Fall sein.

Diese Gleitungsgeschwindigkeit,  $v_w$ , muss also aufgefasst werden als eine über den Querschnitt konstante Massengeschwindigkeit oder »zusätzliche Geschwindigkeit« von allen Molekülen im Rohre; die Richtung dieser zusätzlichen Geschwindigkeit,  $v_w$ , und des Konzentrationsgradienten im Gase ist dieselbe, und also für ein zirkulares Rohr die Richtung der Achse.

Der Koeffizient,  $\zeta$ , wird der Gleitungskoeffizient genannt, und hierfür ist von KUNDT und WARBURG experimentell gefunden:

$$\zeta = \frac{\zeta'}{p} = k \cdot \lambda,$$

wo  $p$  der Druck ist;  $k$  ist eine Konstante in dem Gebiet:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ .

Aus den KNUDSEN'schen Messungen mit Kapillarrohren von sehr verschiedenen Dimensionen erhellt, dass der Wert von  $k$  von dem Radius des Kapillarrohres, bezw. von der Krümmung der festen Wand, unabhängig ist, so dass angenommen werden darf, — jedenfalls in erster Annäherung —, dass der hieraus bestimmte, experimentelle Wert von  $k$  auch für eine plane Oberfläche Gültigkeit hat.

Die gaskinetische Theorie der Gleitung ist im MAXWELL'schen Zustand der Gase mathematisch sehr kompliziert, und bis jetzt besteht hierfür nur die angenäherte Theorie von MAXWELL; diese ist später von R. A. MILLIKAN<sup>1)</sup> auf sehr einfache und übersichtliche Weise dargestellt worden. Diese Theorie von MAXWELL ist aber nur eine angenäherte, und solange das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle in den an die feste Wand grenzenden Gasschichten nicht hinreichend bekannt ist, wird es kaum möglich sein, eine exakte und einwandfreie Theorie für die Gleitung aufzustellen<sup>2)</sup>; es ist aber einfach zu beweisen, dass in dem MAXWELL'schen Zustande der Gase jedenfalls  $k \leq 2$  sein muss, wenn das Cosinusetz für die Zurückwerfung der Moleküle an der Wand Gültigkeit hat.

Dass  $k$  von dem Zurückwerfungsgesetz der Moleküle an der

1) R. A. MILLIKAN: Phys. Rev. 21, S. 217, 1923.

2) H. A. KRAMERS: Il Nuovo Cimento: Vol. VI, Ser. IX, S. 297, 1949.

Wand abhängig ist, hat bereits MAXWELL dargetan und er hat, ausgehend von teilweiser Zurückwerfung nach dem Cosinusgesetz und teilweiser, spiegelnder Zurückwerfung, nach seiner oben erwähnten Theorie abgeleitet:<sup>1)</sup>

$$\zeta = \frac{2-f}{f} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{p\sqrt{1\varrho}} \approx \frac{2-f}{f} \cdot \lambda_{\text{Chapman}},$$

und also, wenn das Cosinusgesetz absolute Gültigkeit hat, d. h.  $f = 1$ :

$$\zeta = \lambda_{\text{Ch.}} \quad \text{oder} \quad k = 1 \cdot -$$

Zieht man in Betracht, dass das Cosinusgesetz für die Zurückwerfung der Moleküle an einer festen Wand in der reinen Molekularströmung, praktisch gesprochen, absolute Gültigkeit besitzt, besteht keine Veranlassung anzunehmen, dass in dem MAXWELL'schen Zustande der Gase für *dieselbe Wand* ein anderes Zurückwerfungsgesetz, z. B. teilweise spiegelnde Zurückwerfung, gültig sein sollte, weil der kinetische Zustand an der festen Wand — auch im MAXWELL'schen Zustande der Gase — innerhalb eines Abstandes von der Wand, entsprechend der mittleren freien Weglänge,  $\lambda$ , ganz analog und vergleichbar ist mit dem Zustand an der Wand in der reinen Molekularströmung.

Ergibt sich also im MAXWELL'schen Zustande für  $k$  experimentell ein Wert von  $k > 1$ , darf hieraus nicht abgeleitet werden, dass ein Teil der Moleküle spiegelnd zurückgeworfen wird<sup>2)</sup>; dies ist sicher nicht erlaubt, solange eine einwandfreie Theorie der Gleitung in dem Gebiet  $R/\lambda \rightarrow \infty$  noch nicht vorliegt. MAXWELL selber hat darauf bereits aufmerksam gemacht.

In dieser Verbindung kann die Arbeit von W. P. J. LIGNAC<sup>3)</sup> erwähnt werden. LIGNAC hat u. a. eine Übersicht über alle bekannten Messungen und Bestimmungen von  $k$  gegeben und dies Material kritisch bearbeitet; ich werde später hierauf in Verbindung mit den Bestimmungen von  $k$  nach der kapillaren Durchströmungsmethode näher zurückkommen, weil diese Methode scheinbar im Mittel grössere Werte für  $k$  ergibt als die

1) Vgl. EARLE H. KENNARD: loc. cit., pag. 296.

2) Vgl. EARLE H. KENNARD: loc. cit., pag. 299.

3) W. P. J. LIGNAC: Dissertatie, Leiden, 1949.

anderen zur Bestimmung der Gleitung benutzten Methoden, wie z. B. die Ablenkungsmethoden der rotierenden Scheibe oder des rotierenden Aussenzylinders, die Methode der schwingenden Scheibe u. s. w.

LIGNAC hat aus dem gesamten Material für den Wert von  $k$  nach allen Methoden:  $k > 1$ , gefunden.

Aus dem von ihm veröffentlichten Material scheint weiter hervorzugehen, dass im Mittel:  $k = \text{ca. } 1.20$ ; die Bestimmungen von  $k$  nach der Durchströmungsmethode ergeben aber im Allgemeinen:  $k = \text{ca. } \frac{4}{3}$ .

Wir können also vorläufig am besten für den Zustand:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , den Ausdruck:

$$v_w = \zeta \cdot \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r \geq R} = k_2 \cdot \lambda \cdot \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r \geq R}$$

verwenden, mit dem Zahlenwert von  $k_2$ , der aus der Beobachtungsreihe hervorgeht. —

Wenn wir den Einfluss der Gleitungsgeschwindigkeit,  $v_w$ , auf die Formel von POISEUILLE berechnen wollen, können wir ein Raumelement  $2\pi r dl \cdot \pi r^2$  (vgl. Fig. 2) im Rohre mit Radius,  $R$ , und Länge,  $L$ , betrachten. Ist der Zustand stationär, erhalten

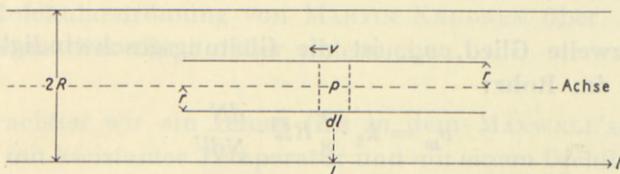


Fig. 2.

wir, weil die Kräfte in der Richtung der Achse in diesem Falle im Gleichgewicht sein müssen, die folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\pi r^2 \cdot \frac{dp}{dl} \cdot dl = 2\pi r dl \cdot \eta \frac{dv}{dr},$$

woraus, weil  $\frac{dp}{dl}$  als eine Konstante angesehen werden kann,  $\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dl}$ , oder nach Integration:

$$v = \frac{1}{4\eta} [(R^2 - r^2) + 2\zeta R] \cdot \frac{dp}{dl}.$$

Da  $\eta \simeq \frac{1}{2} Nm \bar{\Omega} \lambda$  und  $\frac{dp}{dl} = \frac{\pi}{8} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dl}$ , wird:

$$v = v_p + v_w = \frac{\pi}{16} \frac{R^2 - r^2}{\lambda} \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl} + k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit,  $v$ , des Gases im Rohre besteht also aus zwei Gliedern; das erste Glied,  $v_p$ , ist die Geschwindigkeit, herrührend von der hydrodynamischen, laminaren Strömung, und also:

$$v_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{R^2 - r^2}{\lambda} \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl}, \quad \text{woraus sich}$$

für  $r = R$ ,  $v_{p,R} = 0^1)$ , und für  $r = 0$  (Achse des Rohres),  
 $v_{p, \text{Achse}} = \frac{\pi}{16} \frac{R^2}{\lambda} \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl} = \frac{1}{4} \frac{R^2}{\eta} \cdot \frac{dp}{dl}$ , ergibt, während die mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt,  $\pi R^2$ , wird:

$$v_{p, \text{Mitt.}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{R^2}{\eta} \cdot \frac{dp}{dl} = \frac{\pi}{32} \cdot R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl} \cdot \frac{R}{\lambda}, -$$

Das zweite Glied,  $v_w$ , ist die Gleitungsgeschwindigkeit der Moleküle im Rohr:

$$v_w = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl}.$$

Nach Einführung des experimentellen Wertes von  $k_2 = \text{ca. } \frac{4}{3}$ , ergibt sich:

$$v_w = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl} \simeq \frac{\pi}{6} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl}.$$

Aus dem Wert von  $v$  erhält man für  $G$  den bekannten Ausdruck:

1) Da  $v_p = 0$  für  $r = R$  (Wand des Rohres), erhellt hieraus, dass die hydrodynamische Strömung sich auch mit dem Cosinusgesetz für die Zurückwerfung der Moleküle an der festen Wand verträgt. —

$$G(p_1 - p_2) = mN \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{\eta} \cdot \frac{1}{l} \bar{p} \left[ 1 + 4 \frac{\zeta}{R} \right] \frac{dp}{dl},$$

bezw.

$$G(p_1 - p_2) = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{3\pi}{16} k_2 \right],$$

oder, wenn  $k_2 = \frac{4}{3}$ :

$$G(p_1 - p_2) = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \sqrt{1\varrho} \cdot \frac{R^3}{L} (p_1 - p_2) \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{4} \right].$$

§ 3. Bei näherer Betrachtung von  $G$  sehen wir aber, dass diese zweigliedrige Formel noch nicht vollständig ist, weil in diesem Ausdruck für die Strömung von POISEUILLE mit Gleitungskorrektur noch ein Glied fehlt, nämlich ein Glied, herührend von der Selbstdiffusion in dem laminar strömenden Gase zufolge des Konzentrationsgradienten,  $\frac{dN}{dl}$ .

Dies Glied ist bei grösseren Werten von  $R/\lambda$ , verglichen mit den zwei anderen Gliedern, zahlenmässig ohne wesentliche Bedeutung; bei kleineren Werten von  $R/\lambda$  gewinnt aber diese Selbstdiffusionsströmung überwiegende Bedeutung und geht für  $R/\lambda = 0$  in die reine Molekularströmung von MARTIN KNUDSEN über. Wir werden darum dies Glied näher untersuchen.

Betrachten wir ein reines Gas in dem MAXWELL'schen Zustande, mit konstanter Temperatur und mit einem Dichtheits- oder Konzentrationsgradienten,  $dN/dl$ , bezw. einem Druckgradienten,  $dp/dl$ , und nehmen wir an, dass dieser Druckgradient keine Turbulenzströmungen in dem Gase veranlasst, muss eine stationäre Diffusion in der Richtung des Druckgradienten, bezw. Konzentrationsgradienten, von statten gehen. Eine Berechnung nach der einfachen kinetischen Theorie — ausgehend von der Annahme, dass die Moleküle als harte, elastische Kugeln aufgefasst werden können — ergibt für ein reines Gas in dem stationären Zustand, dass die durch ein Flächenelement,  $dS$ , senkrecht zur Richtung des Konzentrationsgradienten,  $dN/dl$ , diffundierende Gasmenge in dem MAXWELL'schen Zustande des Gases wird:

$$m \cdot \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot \frac{dN}{dl} \cdot dS = m \cdot D_{11, \infty} \cdot \frac{dN}{dl} \cdot dS,$$

wo  $D_{11, \infty}$  den Selbstdiffusionskoeffizienten des reinen Gases in dem MAXWELL'schen Zustande des Gases darstellt.

In einem reinen, ruhenden Gase im MAXWELL'schen Zustande ist dieser theoretische Diffusionszustand selbstverständlich nicht möglich, bezw. stabil, aber anders wird es, wenn man es mit einem *laminar strömenden* Gase zu tun hat.

In diesem Falle, z. B. in der Strömung von POISEUILLE, hat man in jeder zirkularzylindrischen, strömenden Lamelle,  $2 \pi r dr \cdot L$ , einen Konzentrationsgradienten,  $dN/dl$ , und in jeder Lamelle muss also, solange keine Turbulenz entsteht und die laminare Strömung zerstört, eine Druckdiffusion von statten gehen, so dass unabhängig von der hydrodynamischen Strömung und der Gleitungsströmung *ausserdem eine Diffusionsströmung* stattfindet.

*Ist das strömende Gas ein reines, unvermishtes Gas, wird diese Diffusion eine Selbstdiffusion.*

Wir können annehmen, dass diese drei Strömungen, d. h. die hydrodynamische Strömung, die Gleitungsströmung und die Diffusionsströmung, einander nicht beeinflussen, so dass der vollständige Ausdruck für die totale, stationäre Strömung — in dem Zustande:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , d. h. in dem MAXWELL'schen Zustande des Gases, — durch Superposition der drei einzelnen Strömungen gefunden wird und also:

$$G' = G(p_1 - p_2) = \frac{2 \pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \left[ \frac{3 \pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{3 \pi}{16} \cdot k_2 \right] + m \cdot D_{11, \infty} \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2,$$

oder:

$$G' = G(p_1 - p_2) = \frac{2 \pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \left[ \frac{3 \pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{3 \pi}{16} \cdot k_2 + \frac{\lambda}{2 R} \right], \quad (6)$$

$$\text{wenn } \frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad D_{11, \infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda.$$

Der besseren Übersicht wegen werden wir zuerst den obenerwähnten Wert des Selbstdiffusionskoeffizienten nach der einfachen kinetischen Theorie ableiten, indem wir von einem reinen Gase in dem Zustande:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , z. B. einem laminar strömenden

Gase mit einem Konzentrationsgradienten,  $dN/dl$ , ausgehen. Durch ein Flächenelement,  $dS$ , senkrecht zu dem Konzentrationsgradienten, werden per Sek., der Druckdiffusion wegen, gehen:

$$n_r \cdot dS \text{ Moleküle, die von rechts kommen (Gruppe I)}$$

und

$$n_l \cdot dS \text{ Moleküle, die von links kommen (Gruppe II).}$$

Wir erhalten leicht, da wir von der konstanten Massenströmung absehen können, vgl. Fig. 3:

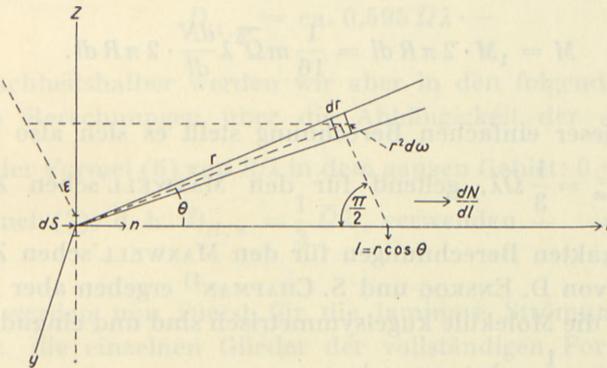


Fig. 3.

$$n_r \cdot dS = dS \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{N_1 \bar{\Omega}}{\lambda} \int \cos \theta \, d\omega e^{-\frac{r}{\lambda}} \, dr$$

und

$$n_l \cdot dS = dS \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{N_2 \bar{\Omega}}{\lambda} \int \cos \theta \, d\omega e^{-\frac{r}{\lambda}} \, dr,$$

wo:

$$N_1 = N_0 + \frac{dN}{dl} \cdot r \cos \theta \quad \text{und} \quad N_2 = N_0 - \frac{dN}{dl} \cdot r \cos \theta.$$

Hieraus erhält man:

$$(n_r - n_l) dS = dS \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\bar{\Omega}}{\lambda} \cdot \int \cos^2 \theta \, d\omega e^{-\frac{r}{\lambda}} \, r \cdot dr$$

und, weil  $d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\epsilon$ :

$$\left. \begin{aligned} (n_r - n_l) dS &= dS \cdot \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \lambda \frac{dN}{dl} \cdot \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{r}{\lambda} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}} d\left(\frac{r}{\lambda}\right) \\ &= dS \cdot \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot \frac{dN}{dl} \end{aligned} \right\} (7)$$

In derselben Weise lässt sich auch die in der Zeiteinheit von einem Rohrstück,  $2\pi R dl$ , empfangene Bewegungsgrösse, herrührend von der Diffusionsströmung, leicht berechnen; diese Bewegungsgrösse in der Richtung des Dichtheitsgradienten wird in dem stationären Zustande:

$$M = {}_1M \cdot 2\pi R dl = \frac{1}{16} m \bar{\Omega}^2 \lambda \frac{dN}{dl} \cdot 2\pi R dl.$$

Bei dieser einfachen Berechnung stellt es sich also heraus, dass  $D_{11, \infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda$ , geltend für den MAXWELL'schen Zustand des Gases.

Die exakten Berechnungen für den MAXWELL'schen Zustand der Gase von D. ENSKOG und S. CHAPMAN<sup>1)</sup> ergeben aber für den Fall, dass die Moleküle kugelsymmetrisch sind und einander nach dem Gesetz:  $\frac{1}{r^5}$ , abstossen, dass:

$$D_{11, \infty} = 1,543 \cdot \frac{\eta}{\rho} = 0,772 \cdot \bar{\Omega} \lambda.$$

Sind aber die Moleküle als harte, elastische Kugeln aufzufassen, ergibt sich:

$$D_{11, \infty} = \frac{6}{5} \cdot \frac{\eta}{\rho} = 1,20 \cdot \frac{\frac{1}{2} Nm \bar{\Omega} \lambda}{Nm} = 0,60 \cdot \bar{\Omega} \lambda.$$

Es ist einfach zu sehen, dass diese Lösung die richtige darstellt, weil es bekannt ist<sup>2)</sup>, dass die gegenseitige Diffusion der Moleküle der zwei durch  $dS$  strömenden Gruppen, I und II, unabhängig ist von den gegenseitigen Zusammenstössen der Moleküle in der Gruppe I bzw. in der Gruppe II. Lassen wir die

1) Vgl. EARLE H. KENNARD, loc. cit., pag. 195.

2) Vgl. EARLE H. KENNARD, loc. cit., pag. 191.

gegenseitigen Zusammenstöße der Moleküle der Gruppe I, bezw. der Gruppe II, ausser Betracht, dann sind nur die Zusammenstöße zwischen den Molekülen der Gruppe I und den Molekülen der Gruppe II von Bedeutung; in diesem Falle erhält man, wie früher von mir abgeleitet<sup>1)</sup>:

$$m \cdot (n_r - n_l) dS = dS \cdot m \cdot \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \frac{dN}{dl} \cdot \frac{1}{S_1},$$

wo  $S_1 = \text{ca. } 0,56^{2)}$ , woraus:

$$D_{11, \infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot \frac{1}{S_1} \text{ d. h.}$$

$$D_{11, \infty} = \text{ca. } 0,595 \bar{\Omega} \lambda \cdot -$$

Einfachheitshalber werden wir aber in den folgenden angenäherten Berechnungen über die Abhängigkeit der einzelnen Glieder der Formel (6) von  $R/\lambda$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , die Formel (7), d. h.  $D_{11, \infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda$ , verwenden. —

Wir werden nun zuerst für die laminare Strömung, wenn  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , die einzelnen Glieder der vollständigen Formel (6):

$$G' = G_3' + G_2' + G_1' = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{3\pi}{16} k_2 + \frac{\lambda}{2R} \right],$$

wo  $G(p_1 - p_2) = G'$ , näher betrachten und überlegen, wie diese Glieder sich in dem Gebiet,  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , mit  $R/\lambda$  ändern, um hierdurch eine Annäherungsformel zu erhalten, die mit der semiempirischen Formel von MARTIN KNUDSEN vergleichbar ist.

a) Das Diffusionsglied:  $G_1' = \pi R^2 \cdot m D_{11, p} \cdot \frac{dN}{dl}$ , wird für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ :

1) SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vid. Selskab; Mat.-fys. Medd. XXIV, No. 4, pag. 50, 1947.

2) W. P. J. LIGNAC: Dissertation, Leiden, S. 22, 1949. In dieser Arbeit wird für den Mittelwert von  $S_1$  angegeben:

$$S_1 = S_{LW} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \sqrt{2} - 1 \right] = 0,56.$$

$$G'_{1,\infty} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\lambda}{2R}, \quad \text{wenn } D_{11,\infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda, \quad \text{bezw.}$$

$$D_{11,\infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{p}, \quad \text{weil } \lambda = p \lambda \cdot -$$

Für kleine Werte von  $R/\lambda$  ist der Rohrdurchmesser,  $2R$ , gegenüber  $\lambda$  nicht mehr gross, so dass wir nach den Überlegungen von MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> über den Einfluss der festen Wand auf den Wert von  $\lambda$  diesen annähernd durch:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2R}},$$

ersetzen müssen.

Wir erhalten hieraus:

$$D_{11,p} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda' \frac{1}{1 + \frac{\lambda'}{2R}}$$

und also:

$$G'_{1,p} = \pi R^2 \cdot m D_{11,p} \cdot \frac{dN}{dl} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \frac{1}{1 + 2R/\lambda}. \quad (8)$$

Der Wert dieses Ausdrucks für  $R/\lambda = 0$  ist aber der von MARTIN KNUDSEN auf direkte Weise abgeleitete Wert für die durchströmende Gasmenge in der reinen Molekularströmung<sup>2)</sup>.

Ob der Ausdruck von  $D_{11,p}$ , der in Übereinstimmung ist mit der Druckabhängigkeit der inneren Reibung und der Wärmeleitfähigkeit der Gase, befriedigende Resultate in dem ganzen Druckgebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , ergeben wird, kann man a priori nicht wissen, auch weil experimentelle Beobachtungen über die Variation des allgemeinen Diffusionskoeffizienten,  $D_{1,2}$ , mit dem Druck  $p$  immer noch fehlen. Es wird sich aber später herausstellen, dass in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , die Variation von  $D_{11,p}$  nur annäherungsweise durch diese Formel befriedigend wiedergegeben werden kann (vgl. Seite 106).

1) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. 31, S. 222, 1910.

2) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. 28, S. 111, 1909. Dieser, in jeder Hinsicht einwandfrei abgeleitete, Wert wurde durch Addition der einzelnen durch den Querschnitt strömenden Moleküle berechnet.

Da wir aus den experimentellen Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN und W. GAEDE wissen, dass der theoretische Wert für

$$\frac{R}{\lambda} = 0: \quad G'_{1,0} = \frac{2\pi}{3} m\bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \sqrt{1\varrho} \cdot R^3 \cdot \frac{P_1 - P_2}{L},$$

in vollständiger Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert für:  $R/\lambda \geq 0$ , ist, können wir hieraus schliessen, dass für  $\frac{R}{\lambda} = 0$ , sowohl:

$$G'_{3,0} = 0, \quad \text{als auch:} \quad G'_{2,0} = 0.$$

Die Formel:

$$D_{11,p} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}},$$

kann für kreisförmige, zylindrische Rohre auch geschrieben werden:

$$\frac{1}{D_{11,p}} = \frac{1}{D_{11,0}} + \frac{1}{D_{11,\infty}}, \quad (9)$$

so dass wir für  $D_{11,p}$  einen Ausdruck erhalten, der ganz analog ist mit der von mir<sup>1)</sup> angegebenen und untersuchten Formel für die Druckabhängigkeit des Wärmeverlustes von einer planen Oberfläche:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\infty}.$$

Hierin bezeichnen, wenn  $T_1 - T_2 = 1^\circ \text{C}$ :

$q_p$ : den Wärmeverlust pro Sek. und  $\text{cm}^2$  bei dem Druck  $p$ ,  
 $q_0$ : den Wärmeverlust pro Sek. und  $\text{cm}^2$  in dem molekul. Zust.  
 $q_\infty$ : den Wärmeverlust pro Sek. und  $\text{cm}^2$  in dem MAXWELL'schen Zustand.

Die obenstehende Formel (9) für  $D_{11,p}$  ist auch bei POLLARD und PRESENT<sup>2)</sup> in Verbindung mit theoretischen Betrachtungen von BOSANQUET erwähnt; vgl. S. 17.

1) SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat.-fys. Medd. XIX, No. 11, S. 6, 1942.

2) W. G. POLLARD und R. D. PRESENT: Phys. Rev., Vol. 73, S. 770, 1948.

b) Wir werden nun das Gleitungsmitglied  $G_2'$  betrachten; dies Gleitungsmitglied ist im MAXWELL'schen Zustande,  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , aufzufassen als davon herrührend, dass alle Moleküle im Rohre eine gemeinschaftliche, konstante Geschwindigkeit,  $v_w$  (zusätzliche Geschwindigkeit) in der Richtung der Achse besitzen; diese Gleitungsgeschwindigkeit ist in dem Zustand,  $R/\lambda \rightarrow \infty$ :

$$v_w = v_2 = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl},$$

wo sich für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , experimentell ergeben hat:  $k_2 = \text{ca. } \frac{4}{3}$ . Die durchströmende Gasmenge der Gleitung wegen wird also für  $\frac{R}{\lambda} \Rightarrow \infty$ :

$$G_{2,\infty}' = mNv_2 \cdot \pi R^2 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{\eta} \cdot 10^9 \cdot p \cdot 4 k_2 \frac{\lambda}{R} \frac{dp}{dl}.$$

Wenn das Cosinusetz gültig ist, und dies erhellt aus der Übereinstimmung zwischen dem experimentellen und theoretischen Wert der reinen Molekularströmung, wissen wir, dass die an der Wand zurückgeworfenen Moleküle im Mittel keine gemeinschaftliche Geschwindigkeit (zusätzliche Geschwindigkeit) in der Richtung der Achse besitzen, so dass nur die Moleküle, die von gegenseitigen Zusammenstößen mit anderen Molekülen kommen, eine Gleitungsgeschwindigkeit besitzen können. Der Einfluss der Wand auf den Ausdruck für  $G_2'$  kann also annäherungsweise auf Grund folgender Betrachtung abgeleitet werden:

Betrachten wir eine Längeneinheit des Rohres, wird die Wandoberfläche  $2 \pi R$  und das Volumen  $\pi R^2$ ; die Anzahl der gegenseitigen Molekularstöße in dem Volumen,  $\pi R^2 \cdot 1 \text{ cm}$ , wird  $n_1 = \frac{N \bar{\Omega}}{\lambda} \cdot \pi R^2$ , während die ganze Anzahl der Stöße, wenn auch die Stöße gegen die Wand mitgezählt werden, beträgt:

$$n = \frac{N \bar{\Omega}}{\lambda} \cdot \pi R^2 + 2 \pi R \cdot \frac{1}{4} N \bar{\Omega},$$

und also:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}}.$$

Wir ersehen hieraus, dass die durchströmende Gasmenge  $G'_2$  bei dem Druck,  $p$ , da von der totalen Anzahl,  $n$ , der Stösse nur  $n_1$  für die Gleitung von Bedeutung ist, wird:

$$G'_{2,p} = \frac{n_1}{n} \cdot G'_{2,\infty} = G'_{2,\infty} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}},$$

so dass wir schreiben können:

$$\begin{aligned} G'_{2,p} &= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{\eta} \cdot 10p \cdot 4 k_2 \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{dp}{dl} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}} \\ &= \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{3\pi}{16} k_2 \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}}, \end{aligned}$$

oder, wenn  $k_2 = \frac{4}{3}$ :

$$G'_{2,p} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} = G'_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} \quad (10)$$

Wenn  $\frac{R}{\lambda} = 0$ , folgt hieraus:  $G'_{2,0} = 0$ .

Für  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$ , erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} G'_{2,p \rightarrow 0} &= G'_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2R}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2R}{\lambda} \\ &= \frac{4}{3} m N \bar{u}_0 \cdot \pi R^2 \cdot \frac{R}{\lambda}, \quad \text{wo} \quad \bar{u}_0 = \frac{\pi}{4} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Nd l} \cdot - \end{aligned}$$

Wir werden später diesen letzten Ausdruck für  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$  auch auf direkte Weise ableiten.

c) Betrachten wir nun das hydrodynamische Glied,  $G'_{3,p}$ , erhalten wir nach der hydrodynamischen Ableitung und also jedenfalls gültig für grössere Werte von  $R/\lambda$ :

$$G'_{3,p} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{\eta} \cdot \rho P \cdot \frac{dp}{dl} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}$$

$$= G'_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}.$$

Hieraus erhellt, dass  $G'_{3,p}$  proportional ist mit  $\frac{2R}{\lambda}$ , bzw.  $\bar{p}$ ; wird dieser Ausdruck auch für kleinere Werte von  $\frac{R}{\lambda}$  verwendet, wird

$$\text{für } \frac{R}{\lambda} = 0: G'_{3,0} = 0,$$

wie auch auf Grund der Beobachtungen erwartet werden muss (vgl. S. 29).

Man kann a priori nicht wissen, wie das hydrodynamische Glied,  $G'_{3,p}$ , in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , genau verläuft. Man darf aber annehmen, dass die hydrodynamische Strömung,  $G'_3$ , nicht einsetzen kann, solange man es nur mit *verinzellen*, gegenseitigen Zusammenstößen der Moleküle zu tun hat. Da dies der Fall ist in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , muss man auch für:  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$ ,  $G'_{3,p} \geq 0$  erwarten.

Das Einsetzen der hydrodynamischen Strömung wird wahrscheinlich erst dann stattfinden können, wenn die Anzahl der gegenseitigen Zusammenstöße in einem Raumelement, z. B. in der Mitte des Rohres, eine hinreichende Grösse erreicht hat, wodurch der Anfang eines »Kontinuums« von Molekülen im Rohr ermöglicht wird<sup>1)</sup>; bei welchem Wert von  $R/\lambda$  in dem Gebiet,  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$ , dieser Zustand eintreten wird, kann man aber im Voraus nicht wissen.

Es wäre dann auch sehr wohl möglich, dass das Glied,  $G'_{3,p}$ , in dem Zustande:  $R/\lambda \geq 0$ , nicht genau proportional mit  $R/\lambda$  ist, sondern eine andere Abhängigkeit von  $R/\lambda$  besitzt; andererseits wird die numerische Grösse des Gliedes:

$$G'_{3,p}/G'_{1,0} = \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda},$$

1) Vgl. u. a.: J. JEANS: An introduction to the kinetic theory of Gases, chapt. IX, p. 225, 1948 (Cambridge University Press).

in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , mit eins verglichen sehr klein, und also ohne grossen Einfluss auf die Summe aller drei Glieder.

Bevor ich hierauf näher eingehe, werde ich erst die Summe der zwei gaskinetischen Glieder,  $G'_{2,p}$  und  $G'_{1,p}$ , in der dreigliedrigen Formel:

$$G'_p = G'_{3,p} + G'_{2,p} + G'_{1,p},$$

näher betrachten.

Wir erkennen leicht, dass die Summe  $(G'_{1,p} + G'_{2,p})$  als Funktion von  $\frac{R}{\lambda}$  kein Minimum (oder Maximum) hat, weil:

$$G'_{1,p} + G'_{2,p} = G'_{1,0} \cdot \frac{1 + \frac{\pi}{4}x}{1+x}, \quad \text{wo } x = \frac{2R}{\lambda};$$

dies erhellt u. a. daraus, dass der Differentialkoeffizient:

$$\frac{d}{dx}(G'_{1,p} + G'_{2,p}) = -G'_{1,0} \cdot \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{(1+x)^2},$$

in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq R/\lambda \leq \infty$ , negativ ist und erst für  $x = \infty$  gleich Null wird.

Die Summe:  $(G'_{1,p} + G'_{2,p})$ , wird also in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , gleichmässig von  $G'_{1,0}$  für  $\frac{R}{\lambda} = 0$  auf  $\frac{\pi}{4} \cdot G'_{1,0}$  für  $\frac{R}{\lambda} = \infty$  abnehmen.

Dies ist auch in Übereinstimmung mit der semi-empirischen Formel von MARTIN KNUDSEN, da die Summe:  $b \cdot \frac{1 + c_1 \cdot \bar{p}}{1 + c_2 \cdot \bar{p}}$ , der entsprechenden Glieder in dieser Formel auch kein Minimum hat, und regelmässig mit wachsendem Wert von  $\bar{p}$  abnimmt, weil  $c_1 < c_2$ .

Es erhellt aus diesem Verlauf der Summe  $(G'_{1,p} + G'_{2,p})$  mit  $R/\lambda$ , bzw. aus der Summe der zwei entsprechenden Glieder der semi-empirischen Formel von MARTIN KNUDSEN, wie auch aus den späteren, exakten Berechnungen von  $G'_{1,p}$  und  $G'_{2,p}$ ,

dass die Entstehung des von MARTIN KNUDSEN gefundenen Minimums bei  $R/\lambda = \text{ca. } 0,3$  nach aller Wahrscheinlichkeit nicht von dem Verlauf der Gleitungs- und Diffusionsströmung, bezw.  $(G'_{1,p} + G'_{2,p})$ , herrührt, also auch nicht durch die gegenseitige Wechselwirkung der Moleküle in dem Gebiet:  $R/\lambda \rightarrow 0$ , wie von MARTIN KNUDSEN angedeutet, bewirkt ist. —

Die Entstehung des beobachteten Minimums,  $G'_{\text{min.}} = \text{ca. } 0,93 \cdot G'_{1,0}$  bei  $\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\text{min.}} = \text{ca. } 0,30$ , ist somit dadurch zu erklären, dass das hydrodynamische Glied:  $G'_{3,p}$ , welches proportional mit  $\frac{R}{\lambda}$ , bezw.  $\bar{p}$ , wächst, zu der Summe  $(G'_{1,p} + G'_{2,p})$ , welche gleichmässig mit  $R/\lambda$ , bezw.  $\bar{p}$ , abnimmt, hinzukommt. —

Da die aus der angenäherten theoretischen Formel berechneten Werte von  $G'_{\text{min.}}$  und  $\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\text{min.}}$  mit den beobachteten Werten gut übereinstimmen, wenn  $G'_{3,p} = G'_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}$  gesetzt wird, darf also angenommen werden, dass die hydrodynamische, laminare Strömung,  $G'_{3,p}$ , bereits bei einem Wert von  $R/\lambda = \text{ca. } 0,2$  à  $0,3$  ihren vollen theoretischen Wert:

$$G'_{3,p} = G'_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda},$$

erreicht hat. —

Wir werden darum im folgenden von der Annahme ausgehen, dass in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ :

$$G'_{3,p} = G'_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}, \quad (11)$$

gesetzt werden kann und jedenfalls als eine brauchbare Annäherung in dem Gebiet  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$  verwendet werden darf.

Auch MARTIN KNUDSEN hat in seiner semi-empirischen Formel (1) diese Lösung verwendet. —

Wir entnehmen also hieraus, dass die dreigliedrige, theoretische Formel in erster Annäherung geschrieben werden kann:

$$G' = G'_3 + G'_2 + G'_1 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} + \frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}} \right], \quad (12)$$

während die semi-empirische, allgemeine Formel von MARTIN KNUDSEN, wie früher erwähnt, folgendermassen lautet:

$$G' = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + 1,548 \frac{2R}{\lambda}} + \frac{1}{1 + 1,548 \cdot \frac{2R}{\lambda}} \right].$$

Wir ersehen hieraus, dass die dreigliedrige, theoretische Formel und die semi-empirische Formel von MARTIN KNUDSEN der Form nach vollständig übereinstimmen.

Aus der Formel von MARTIN KNUDSEN erhellt:

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,323 \quad \text{und} \quad G'_{\min.} = 0,952 \cdot G'_{1,0},$$

während die theoretische Formel ergibt:

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,353 \quad \text{und} \quad G'_{\min.} = 0,963 \cdot G'_{1,0}.$$

Experimentell wird im Mittel gefunden:

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,310 \quad \text{und} \quad G'_{\min.} = 0,930 \cdot G'_{1,0}.$$

Die Übereinstimmung kann als befriedigend angesehen werden, wenn in Betracht gezogen wird, dass die Zahlenfaktoren von  $R/\lambda$  in der theoretischen Formel Annäherungswerte sind und die semi-empirische, allgemeine Formel von MARTIN KNUDSEN eine mittlere Formel ist, d. h., dass die Zahlenfaktoren von  $R/\lambda$  in dieser Formel Mittelwerte sind.

Durch Änderung der Zahlenfaktoren von  $R/\lambda$  in den zwei gas-kinetischen Gliedern der semi-empirischen Formel MARTIN KNUDSENS kann eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen der einzelnen Messreihen leicht erreicht werden; so

werden z. B. die Präzisionsmessungen für  $\text{CO}_2$  mit dem Rohr No. 4, die in der Tabelle II wiedergegeben sind, befriedigend durch die folgende, semi-empirische Formel:

$$G' = G'_{1,0} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + 2,247 \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + 2,767 \cdot \frac{2R}{\lambda}} + \frac{1}{1 + 2,767 \cdot \frac{2R}{\lambda}} \right],$$

dargestellt; aus dieser Formel folgt z. B.:

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,300 \quad \text{und} \quad G'_{\min.} = 0,927 \cdot G'_{1,0},$$

und für  $\frac{2R}{\lambda} \rightarrow \infty$ :  $G'_{\rightarrow \infty} = G'_{1,0} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + 0,812 \right],$

während sich aus der graphischen Darstellung der Beobachtungsreihe ergab:

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = 0,310, \quad G'_{\min.} = 0,925 \cdot G'_{1,0}$$

und  $c_1/c_2 = 0,812$ .

Für die Messungen mit  $\text{CO}_2$  und dem Rohr No. 3 wurde für das Gebiet:  $\frac{R}{\lambda} > 0,5$ , gefunden:

$$G' = G'_{1,0} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + 1,217 \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + 1,548 \cdot \frac{2R}{\lambda}} + \frac{1}{1 + 1,548 \cdot \frac{2R}{\lambda}} \right].$$

Aus dieser Formel folgt

$$\text{für } \frac{2R}{\lambda} \rightarrow \infty: \quad G'_{\rightarrow \infty} = G'_{1,0} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + 0,786 \right],$$

also:  $c_1/c_2 = 0,786$ . —

Für diese Beobachtungsreihe ( $\text{CO}_2 \sim$  Rohr 3) sind die Beobachtungen in dem Gebiet,  $R/\lambda < 0,5$ , in guter Übereinstimmung

mit der obengenannten Beobachtungsreihe mit  $\text{CO}_2$  und Rohr No. 4 (Tabelle II).

§ 4. In der dreigliedrigen Formel (12) können wir die beiden gaskinetischen Glieder, nämlich 1° das Gleitungsmitglied, und 2° das Diffusionsmitglied, noch näher betrachten.

1°: *Das Gleitungsmitglied.* Aus der Formel ersehen wir, dass das Gleitungsmitglied, d. h. die der Gleitung wegen durchströmende Gasmenge, nicht konstant, sondern von  $R/\lambda$  abhängig ist.

Für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  ergibt sich, in Übereinstimmung mit dem Gleitungsmitglied, für die Gleitungsgeschwindigkeit der Moleküle, d. h. die konstante, zusätzliche Geschwindigkeit aller Moleküle im Rohre:

$$v_2 = \zeta \cdot \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r \geq R} = k_2 \cdot \lambda \cdot \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r \geq R} = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl}$$

Die Beobachtungen von MARTIN KNUDSEN ergeben für die untersuchten Gase in dem Gebiet:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ ,  $k_2 = \text{ca. } \frac{4}{3}$ , während man aus der MAXWELL'schen Theorie, die aber nicht exakt ist, für  $R/\lambda \rightarrow \infty$ ,  $k_2 = 1$  erhält, unter der Voraussetzung, dass das Cosinusetz absolute Gültigkeit hat.

Es wäre möglich, dass das Gleitungsmitglied und das Diffusionsmitglied durch die vorliegende, semi-empirische Formel von MARTIN KNUDSEN nicht ganz einwandfrei aus dem Beobachtungsmaterial bestimmt sind, weil in dieser Formel für den Nenner beider gaskinetischen Glieder derselbe Wert  $(1 + c_2 \cdot \bar{p})$  angenommen ist; auf den Wert von  $k_2$  für:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , wird dies aber ohne Einfluss sein, da das Diffusionsmitglied in dem Gebiet:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , dem Gleitungsmitglied gegenüber nicht von wesentlicher Bedeutung ist.

Für  $R/\lambda = 0$  wird, wenn das Cosinusetz gilt, das Gleitungsmitglied gleich Null, weil nur die Moleküle, welche von gegenseitigen Zusammenstößen mit anderen Molekülen im Rohr kommen, im Mittel eine Gleitungsgeschwindigkeit besitzen können.

Für  $R/\lambda \geq 0$ , in welchem Zustande nur vereinzelte, gegenseitige Zusammenstöße der Moleküle stattfinden, erhält man für diese Moleküle, wie später (S. 77) abgeleitet werden wird:

$$v_{2 \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl} = v_{x \rightarrow 0}$$

und also wäre für  $R/\lambda \Rightarrow 0$ :  $k_2 = 2$ , wenn wir die Formel:  

$$v_2 = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Nd\ell}$$
, auch für diesen Zustand verwenden.

Es erhellt hieraus, dass experimentelle Bestimmungen von  $k_2$  im Allgemeinen, und insbesondere in den Durchströmungsmethoden, nur dann Wert haben, wenn bei einer Bestimmung von  $k_2$  auch angegeben wird, in welchem Bereich von  $R/\lambda$  die experimentelle Bestimmung von  $k_2$  durchgeführt wurde, so dass beurteilt werden kann, ob der gefundene Wert von  $k_2$  dem Grenzwert der Gleitungsgeschwindigkeit,  $v_2 \rightarrow \infty$ , für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  entspricht.

Bei zukünftigen, experimentellen Bestimmungen von  $k_2$  muss die Aufmerksamkeit hierauf gelenkt werden.

Es wäre darum von Bedeutung, in dem ganzen Gebiet:  
 $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , den Gleitungskoeffizienten und seine Abhängigkeit von  $R/\lambda$  nach den verschiedenen Methoden, die hierfür in Betracht kommen, experimentell zu untersuchen und die nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate für  $k_2$  miteinander zu vergleichen.

Die verschiedenen Methoden<sup>1)</sup> zur Bestimmung von  $k_2$ , kann man in zwei Gruppen einteilen, nämlich:

a) Die Methoden, in welchen ein Druck- bzw. Dichtheitsgradient vorhanden ist; zu dieser Gruppe gehören die hier behandelte Durchströmungsmethode von POISEUILLE und MARTIN KNUDSEN und auch die Methode der Bestimmung des Luftwiderstandes,  $K$ , gegen die langsame Bewegung kleiner Kugeln (für  $a/\lambda \rightarrow \infty$ :  $K = 6\pi\eta a \cdot U$ , bzw. das Gesetz von STOKES), weil auch in diesem Falle eine laminare, hydrodynamische Strömung in dem die Kugel umgebenden Gase vorhanden ist.

Der Druckgradient in den Lamellen dieser laminaren, hydrodynamischen Strömung wird auch in diesen eine Selbstdiffusionsströmung verursachen und aufrechterhalten. —

In dieser Gruppe muss auf Grund der Beobachtungen eine Sonderung zwischen der Gleitungsströmung und der Selbstdiffusionsströmung vorgenommen werden, so dass  $k_2$  aus der Gleitungsströmung bestimmt werden kann.

b) Die Methoden, in welchen kein Druckgradient von Be-

1) Vgl. an Literatur u. a.: W. P. J. LIGNAC: Dissertatie, Leiden, 1949.

deutung anwesend ist; hierzu gehören u. a. die Methode der in sich selbst schwingenden, kreisförmigen Scheibe (die Methode von MAXWELL) und die Methode der koaxialen, kreisförmigen Zylinder, von welchen der Aussenzylinder mit einer konstanten Geschwindigkeit um die gemeinschaftliche Achse rotiert; in dieser Methode wird durch die Rotation des Aussenzylinders der innere Zylinder abgelenkt, und wenn dieser an einem Torsionsfaden aufgehängt ist, entsteht eine stationäre Ablenkungsmethode, die sehr genaue Resultate ergeben und durch welche die Gleitung bestimmt werden kann. Sind die Radien der Zylinder  $R_1$  und

$R_2$  und ist:  $\frac{R_2 - R_1}{\frac{1}{2}(R_2 + R_1)} \ll 1$ , kann die Abhängigkeit zwischen  $k_2$

und  $\frac{R_2 - R_1}{\lambda}$  leicht experimentell bestimmt werden. —

Es wird wahrscheinlich schwierig sein, eine brauchbare Theorie für die theoretische Abhängigkeit zwischen  $\zeta$ , bzw.  $v_2$ ,

und  $R/\lambda$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , aufzubauen, weil der

Zustand des Gases in dem Gebiet  $R/\lambda \geq \infty$  hydrodynamisch ist, während der Zustand des Gases in dem Gebiet  $R/\lambda \geq 0$  rein gaskinetisch ist. LIGNAC<sup>1)</sup> hat mit Hilfe der Methode der in sich selbst schwingenden Scheibe eine hübsche, experimentelle Untersuchung mit mehreren Gasen (He, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> und C<sub>2</sub>H<sub>4</sub>) durchgeführt. Der Verlauf der Dämpfung in dem ganzen Gebiet:

$0 \leq \frac{d}{\lambda} \leq \infty$ , wurde gemessen, und die Resultate für die Gebiete

$d/\lambda \rightarrow 0$  und  $d/\lambda \rightarrow \infty$  mit den vorliegenden Theorien verglichen.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung in diesen Gebieten ist sehr befriedigend; das Zwischengebiet muss aber theoretisch noch näher geklärt werden. —

Eine vollständige, experimentelle Bestimmung der Variation

von  $\zeta$ , in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , liegt aber durch die

direkten (MARTIN KNUDSEN und SOPHUS WEBER) und die indirekten (R. A. MILLIKAN, J. MATTAUCH u. A.) Untersuchungen über den Luftwiderstand,  $K$ , gegen die langsame Bewegung kleiner Kugeln (Gesetz von STOKES), vor. MARTIN KNUDSEN und

1) W. P. J. LIGNAC: loc. cit.

SOPHUS WEBER<sup>1)</sup> haben durch Beobachtung der Dämpfung von schwingenden Glaskugeln gefunden:

$$K = 6 \pi \eta a \cdot U \left[ 1 + \frac{\lambda}{a} \left( A + B \cdot e^{-c \cdot \frac{a}{\lambda}} \right) \right]^{-1}$$

$a$  ist der Radius und  $U$  die konstante Geschwindigkeit der Kugel.

Wird die CHAPMAN'sche freie Weglänge,  $\lambda$ , verwendet, ergibt sich:

$$A = 1,10, \quad B = 0,57 \quad \text{und} \quad C = 1,15$$

oder annäherungsweise:

$$A = 1,10, \quad \frac{B}{A} = \text{ca. } \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad C = 1,15.$$

Der Form nach ist diese Formel später von MILLIKAN<sup>2)</sup> und auch von MATTAUCH<sup>3)</sup> völlig bestätigt worden, obwohl die Werte von MILLIKAN und MATTAUCH für  $A$ ,  $B$  und  $C$  etwas von den von KNUDSEN und WEBER gefundenen Werten abweichen.

Aus dem Ausdruck für  $K$  wird leicht abgeleitet:

Für  $a/\lambda \geq 0$ :  $K_0 = \frac{3}{A+B} \cdot \rho \bar{\Omega} \cdot \pi a^2 \cdot U$ , wo  $A + B = 1,67$ , während MILLIKAN:  $A + B = 1,65$ , und MATTAUCH:  $A + B = 1,73$ , gefunden haben.

Für  $a/\lambda \rightarrow \infty$  (Gesetz von STOKES mit Gleitungskorrektion) wird aus der Formel von  $K$  abgeleitet:  $K = \frac{6 \pi \eta a \cdot U}{1 + A \cdot \lambda/a}$ , wo  $A = k_2$ . —

P. EPSTEIN<sup>4)</sup> hat für  $\frac{a}{\lambda} = 0$ , unter Berücksichtigung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Cosinusetzes, den folgenden, theoretischen Ausdruck abgeleitet:

1) MARTIN KNUDSEN und SOPHUS WEBER: Ann. d. Phys. (4) 36, S. 981, 1911.

2) R. A. MILLIKAN: Phys. Rev. (2) 22, S. 1, 1923.

3) J. MATTAUCH: Z. Phys. (6) 32, S. 439, 1925.

4) P. EPSTEIN: Phys. Rev., Aug. 1923, vgl. auch MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. 4, 46, S. 641, 1915.

$$\begin{aligned} \text{Für } \frac{a}{\lambda} = 0: K_{0, \text{ber.}} &= \left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \rho \bar{\Omega} \cdot \pi a^2 \cdot U \\ &= 1,857 \cdot \rho \bar{\Omega} \cdot \pi a^2 \cdot U, \end{aligned}$$

während nach dem obenstehenden:

$$\begin{aligned} K_{0, \text{beob.}} &= \frac{3}{A + B} \cdot \rho \bar{\Omega} \cdot \pi a^2 \cdot U \\ &= 1,82 \cdot \rho \bar{\Omega} \cdot \pi a^2 \cdot U. \end{aligned}$$

Es scheint demnach, als ob der von KNUDSEN und WEBER eingeführte Akkommodationskoeffizient für die translatorische Energie,  $a_1$ , gleich Eins sei — jedenfalls für atmosph. Luft.

Schreiben wir, ausgehend von dem hydrodynamischen Zustande,  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty$ :

$$K \underset{\rightarrow \infty}{=} \frac{6 \pi \eta a}{1 + k_2 \cdot \frac{\lambda}{a}} U,$$

ergibt sich also aus den Beobachtungen, dass:

$$k_2 = A + B \cdot e^{-c \cdot \frac{a}{\lambda}} = A \left( 1 + \frac{B}{A} \cdot e^{-c \cdot \frac{a}{\lambda}} \right),$$

wo  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstanten sind.

Wir erhalten hieraus:

$$\text{für } \frac{a}{\lambda} = 0: \quad k_{2,0} = A + B,$$

und

$$\text{für } \frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty: \quad k_{2,\infty} = A,$$

woraus  $\frac{k_{2,0}}{k_{2,\infty}} = \frac{A+B}{A} = \frac{3}{2}$ , weil annäherungsweise  $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$ .

Es wäre in vielen Beziehungen von Bedeutung, die Messungen von KNUDSEN und WEBER mit anderen Gasen zu wiederholen, insbesondere mit  $\text{H}_2$  und  $\text{He}$ , und auch die verwendeten Kugeln durch andere Körperformen, z. B. plane, kreisförmige Scheiben, zu ersetzen. — Auch eine Präzisionsuntersuchung mit Hilfe der

Ablenkungsmethode des rotierenden Aussenzylinders für verschiedene Gase wäre in dieser Verbindung von grossem Interesse. —

Obwohl in dieser Untersuchung über den Luftwiderstand,  $K$ , gegen die langsame Bewegung kleiner Kugeln dem Einfluss der Selbstdiffusionsströmung in den Lamellen der laminaren, hydrodynamischen Strömung des umgebenden Gases nicht Rechnung getragen worden ist, wird wohl kein grosser Fehler gemacht werden, wenn wir annehmen, dass für die Variation von  $k_2$  mit  $\frac{a}{\lambda}$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , die Formel:

$$k_2 = k_{2,\infty} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-c_2 \cdot \frac{a}{\lambda}} \right),$$

verwendet werden darf. Wir werden später hierauf näher zurückkommen (S. 102).

2° *Das Diffusionsglied:* Dies neue Glied in der Formel von POISEUILLE — herrührend von der Druckdiffusion, bezw. für reine Gase, von der Selbstdiffusion in den im Kapillarrohr strömenden Lamellen — ist annäherungsweise bestimmt durch das Glied:

$$G'_1 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{2R}{\lambda}} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot m \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{2R}{\lambda}} \cdot \pi R^2.$$

Für  $R/\lambda = 0$  erhält man hieraus:  $G'_{1,0} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{dN}{dl}$ , d. h. den Ausdruck für die reine Molekularströmung.

Dieser Ausdruck für  $R/\lambda = 0$  kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$G'_{1,0} = \frac{2}{3} m \bar{\Omega} R \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2 = D_{11,0} \cdot m \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2,$$

wenn:

$$D_{11,0} = \frac{2}{3} \bar{\Omega} R.$$

Für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  wird für  $\alpha_1 = 1$ :

$$G'_{1,\infty} = \frac{1}{3} \bar{D} \lambda m \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2 = D'_{11,\infty} \cdot m \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2.$$

und für

$$\alpha_1 = S_1: G'_{1,\infty} = \frac{1}{3} \bar{D} \lambda \cdot \frac{1}{S_1} m \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2 = D'_{11,\infty} \cdot m \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2.$$

Der Wert,  $D'_{11,\infty} = \frac{1}{3} \bar{D} \lambda$ , stimmt mit dem Ausdruck für den Selbstdiffusionskoeffizienten, abgeleitet nach der einfachen kinetischen Theorie der Gase, überein, während  $D'_{11,\infty} = \frac{1}{3} \bar{D} \lambda \cdot 1/S_1 = \text{ca. } 0,60 \cdot \bar{D} \lambda$ , mit  $S_1 = 0,56$ , der exakten Theorie für harte, elastische Moleküle im MAXWELL'schen Zustande der Gase entspricht.

MARTIN KNUDSEN hat in seiner semi-empirischen Formel einen Mittelwert von  $\alpha_1 = 1,548$  angegeben; dieser Wert ist aber wahrscheinlich zu klein für das Gebiet:  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$ , und zu gross für das Gebiet:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ .

In den nachstehenden, angenäherten Berechnungen werden wir, in Übereinstimmung mit den vorhergehenden, angenäherten Berechnungen, den Mittelwert  $\alpha_1 = 1$  verwenden, weil es sich im folgenden nur um eine orientierende Berechnung handelt.

Ob es überhaupt möglich sein wird, durch Analyse der beobachteten Kurve:  $G' = G'_{1,0} \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$ , eine befriedigende Scheidung der beiden gaskinetischen Glieder zu erreichen, und einen befriedigend konstanten Wert für  $\alpha_1$ , geltend für das ganze Gebiet  $0 \leq R/\lambda \leq \infty$ , festzustellen, kann erst näher untersucht werden, wenn neue Präzisionsmessungen für das ganze Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , vorliegen.

Im Allgemeinen kann aber angenommen werden, dass die Variation von  $D_{11,p}$  mit  $R/\lambda$  sehr kompliziert ist, auch in Verbindung mit dem Übergang von dem molekularen in den MAXWELL'schen Zustand. Da ausserdem der Faktor  $C_1$  in der exakten

Formel:  $D_{11,\infty} = C_1 \bar{\Omega} \lambda$ , in dem MAXWELL'schen Zustande der Gase von den intermolekularen Kräften abhängig ist, wird die Funktion  $f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$  in der Formel:  $G' = G'_{1,0} f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$ , nur in erster Annäherung eine eindeutige Funktion von  $R/\lambda$ , geltend für alle Gase, sein; im Praxis aber sind, wie auch von MARTIN KNUDSEN experimentell gefunden, die Abweichungen zwischen den verschiedenen Gasen sehr gering, auch weil bei grösseren Werten von  $R/\lambda$  das Diffusionsglied, dem Gleitungsmitglied gegenüber, beinahe ohne zahlenmässige Bedeutung ist.

Es ist aber nicht ohne Interesse, die Aufmerksamkeit insbesondere auf dies Diffusionsglied,  $G'_1$ , in der laminaren Strömung reiner Gase zu lenken, weil man früher die Auffassung hatte, dass die Selbstdiffusion, bezw. der Selbstdiffusionskoeffizient, nur als eine mathematische Grösse angesehen werden könnte, und dass diese Grösse experimenteller Bestimmung nicht zugänglich wäre, weil es in einem reinen Gase nicht möglich ist, die diffundierenden Moleküle von den Molekülen, durch welche sie diffundieren, zu unterscheiden<sup>1)</sup>.

Man hat aber in den letzten Jahren — wahrscheinlich mit sehr grosser Annäherung — den Selbstdiffusionskoeffizienten in dem MAXWELL'schen Zustande der Gase mit Hilfe der gegenseitigen Diffusion von Isotopen desselben Gases, wovon einer der Isotopen radioaktiv ist, bestimmt; ausserdem hat man die gegenseitige Diffusion von Molekülen mit demselben Molekulargewicht, die in mehreren Zustandsformen auftreten können, wie z. B. Ortho- und Para-Wasserstoff<sup>2)</sup>, gemessen.

Man hat auch, um einen annähernden Wert des Selbstdiffusionskoeffizienten zu erhalten, die gegenseitige Diffusion komplexer Moleküle mit derselben Masse, wie z. B.  $N_2$  und CO oder  $N_2O$  und  $CO_2$ <sup>3)</sup>, untersucht. Diese Messungen haben befriedigende Resultate und befriedigende Übereinstimmung mit der exakten Theorie der Selbstdiffusion gegeben, obwohl sie —

1) S. CHAPMAN und T. G. COWLING: The mathematical Theory of non-uniform Gases, Cambridge, S. 249, 14, 5, 1939, oder EARLE H. KENNARD: loc. cit. Seite 194, Sec. 110, wo Kennard schreibt: «accordingly, strict selfdiffusion has in reality become a notion devoid of physical meaning ...» usw.

2) P. HARTECK und H. W. SCHMIDT: Z. f. Phys. Chem. 21, S. 447, 1933.

3) L. E. BOARDMAN and N. E. WILD: Proc. Roy. Soc. A 162, S. 511, 1937.

streng theoretisch gesprochen — nur als sehr grosse Annäherungen angesehen werden können.

Das neue, dritte Glied in der Formel von POISEUILLE, bezw.  $G_1^*$ , beweist aber, dass der Selbstdiffusionskoeffizient der Gase eine physikalische Grösse ist, die gemessen werden kann, selbst wenn kein Unterschied zwischen den diffundierenden Molekülen und den Molekülen, wodurch die erstgenannten diffundieren, besteht; in einem laminar strömenden Gase ist die Selbstdiffusion direkter Messung zugänglich, weil die durch ein Kapillarrohr strömende Menge des reinen Gases durch die Selbstdiffusion vergrössert wird.

Ob es möglich sein wird, durch neue Präzisionsmessungen der laminaren, stationären Strömung reiner Gase durch Kapillarrohre, enge Spalten oder andere enge Kanäle eine befriedigende, experimentelle Bestimmung des Selbstdiffusionskoeffizienten und seiner Variation in dem ganzen Gebiet,  $0 \leq R/\lambda \leq \infty$ , zu erreichen, ist eine experimentelle Frage, die näher untersucht werden muss; in dieser Verbindung wären auch neue Untersuchungen über die Variation des Selbstdiffusionskoeffizienten,  $D_{11,p}$ , mit dem Druck,  $\bar{p}$ , bezw. mit  $R/\lambda$ , z. B. mit Hilfe der Isotopenmethode oder durch die gegenseitige Diffusion von Ortho- und Para-Wasserstoff, von grossem Interesse. Hierdurch würde sich u. a. herausstellen, welchen Wert  $\alpha_1$  in dem molekularen und in dem MAXWELL'schen Gebiet hat, bezw. wie der experimentelle Übergang von dem molekularen in das MAXWELL'sche Gebiet vonstatten geht.<sup>1)</sup>

Anschliessend an das Vorhergehende können wir die Messungen mit Wasserstoff von MARTIN KNUDSEN in der Tabelle III betrachten. Wir ersehen hieraus, dass mit einem Kapillarrohr: Länge  $L = 29,81$  cm und Radius  $9,729 \cdot 10^{-3}$  cm, bei der Temperatur,  $t = 26^\circ 25$  C, gefunden wurde, dass  $T_0 = 0,01148$  für  $\frac{R}{\lambda} = 0$ , und  $T = 0,01123$  bei dem Druck:  $\bar{p} = 970,2$  Bar., bezw.  $R/\lambda = 0,75$ , sind.

1) Vgl.: I. O. HIRSCHFELDER, R. BYRON BIRD & ELLEN L. SPOTZ: Chemical Reviews, 44, S. 205, 1949.

Hieraus erhält man mit Hilfe der Formel von MARTIN KNUDSEN das Diffusionsglied:

$$G'_{1,p} = T_0 \cdot 1\varrho \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{2R}{\lambda}}$$

Für die durchströmende Gasmenge, herrührend von der Selbstdiffusion, ergibt sich hieraus:

$$T_{0,\text{obs.}} \cdot 1\varrho \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{2R}{\lambda}} (p_1 - p_2) = D_{11,p} m \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2$$

oder:

$$D_{11,p} = \frac{L}{\pi R^2} T_{0,\text{obs.}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{2R}{\lambda}}, \quad \text{weil } m \cdot \frac{dN}{dl} = 1\varrho \cdot \frac{p_1 - p_2}{L}.$$

Verwenden wir, in Übereinstimmung mit den angenäherten Berechnungen,  $\alpha_1 = 1$ , erhalten wir hieraus — annäherungsweise — für Wasserstoff bei dem Druck  $p = 970,2$  Bar., bzw.  $\frac{R}{\lambda} = 0,75$ , und  $t = 26^\circ 25$  C:

$$\underline{D_{11,p} = 463 \text{ cm}^2/\text{sek.}}$$

Gehen wir andererseits aus von dem Wert des Selbstdiffusionskoeffizienten von Wasserstoff im MAXWELL'schen Zustande der Gase, bzw. dem gemessenen Wert der gegenseitigen Diffusion von Ortho- und Para-Wasserstoff:

$$D'_{11,p_0} = 1,28 \text{ cm}^2/\text{sek}, \quad \text{bei } t = 0^\circ \text{C} \quad \text{und } p_0 = 760 \text{ mm Hg},$$

erhalten wir bei  $26^\circ 25$  C und  $760$  mm Druck =  $p_0$ :

$$D'_{11,p_0} = 1,28 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1,69} = 1,495 \text{ cm}^2/\text{sek.}, \quad \text{bei } t = 26^\circ, 25 \text{ C}.$$

Von diesem Wert für  $D'_{11,p_0}$  ausgehend, können wir für dasselbe Rohr den Wert für  $D_{11,p}$  bei dem Druck  $p = 970,2$  Bar., bzw.  $R/\lambda = 0,75$ , schätzungsweise bestimmen.

Nehmen wir an, dass der Diffusionszustand des Gases im Rohr bei  $R/\lambda = 0,75$  dem molekularen Zustand des Gases näher

steht als dem MAXWELL'schen Zustand, können wir schreiben:

$$D_{11,p} = D'_{11,760\text{ mm.}} \cdot \frac{1,0108 \cdot 10^6}{970,2} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_2 \cdot \frac{\lambda}{2R}} \cdot S_1,$$

wo  $S_1 = 0,56$ . Verwenden wir auch in diesem Ausdruck die Annäherung:  $\alpha_2 = 1$ , erhält man damit für  $\frac{R}{\lambda} = 0,75$  und  $t = 26^\circ 25 \text{ C}$ :

$$\underline{D_{11,p} = 525 \text{ cm}^2/\text{sek.}}$$

Es erhellt daraus, obwohl es sich hier nur um eine Schätzung handelt, weil die verwendeten Werte von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  wahrscheinlich nur grobe Annäherungen sind, dass bezüglich der Grössenordnung der zwei Werte von  $D_{11,p}$  Übereinstimmung vorliegt.

In den vorhergehenden Betrachtungen bin ich im Allgemeinen von dem Zustande des Gases, charakterisiert durch:  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , also von dem MAXWELL'schen Zustande des Gases, ausgegangen.

Es ist aber möglich, von dem Zustande:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$ , auszugehen, und es zeigt sich dann, dass es möglich ist, die zwei gaskinetischen Glieder in der Formel von POISEUILLE — jedenfalls für den Zustand:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$ , theoretisch zu berechnen; es wird sich aber auch durch die folgenden Berechnungen zeigen, dass die Variation von  $D_{11,p}$  mit  $R/\lambda$ , bzw. mit dem Druck  $\bar{p}$ , für das Gebiet:  $R/\lambda \rightarrow 0$ , nicht ganz so einfach ist, wie es hier der besseren Übersicht wegen angenommen worden ist.

§ 5. Wir werden nun — auch als Einleitung zu den folgenden Berechnungen — die Theorie der reinen Molekularströmung betrachten. —

Für ein kreisförmiges Rohr mit Radius,  $R$ , und Länge,  $L$ , wird der rein molekulare Zustand durch:  $\lambda \rightarrow \infty$ , bzw.  $\frac{R}{\lambda} = 0$ , charakterisiert, d. h. im Inneren des Rohres kommen keine gegenseitigen Zusammenstösse der Moleküle vor. Ist ausserdem die Bedingung:  $R/L \ll 1$ , erfüllt, kommen alle Moleküle im

Rohr — praktisch gesprochen — von Stößen gegen die Rohrwand her, weil der Einfluss der Endfläche des Rohres dann vernachlässigt werden kann.

Die Voraussetzungen, von welchen wir im folgenden ausgehen, sind:

1° Die gegen eine feste Wand stossenden Moleküle werden nach dem Cosinusetz zurückgeworfen, d. h. jedes gegen die Wand anprallende Molekül hat dieselbe Wahrscheinlichkeit, in jedem beliebigen Azimuth zurückgeworfen zu werden; die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Ausfallswinkels ist durch das Cosinusetz gegeben. —

2° Für alle von einem Oberflächenelement der Wand,  $dS'$ , zurückgeworfenen Moleküle, jedes mit der Masse,  $m$ , ist die Geschwindigkeitsverteilung durch das MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gegeben.

Aus 1° und 2° folgt, dass die gesamte Bewegungsgrösse der Wand entlang, herrührend von den von dem Element,  $dS'$ , zurückgeworfenen Molekülen, immer Null wird, auch im Falle, dass die auf das Element,  $dS'$ , einfallenden Moleküle eine gemeinschaftliche, konstante Massengeschwindigkeit,  $w$ , in der Richtung der Oberfläche, besitzen, oder nicht mit der Wand in Temperaturgleichgewicht sind<sup>1)</sup>. —

3° Ist das Gas als Gesamtheit in Ruhe und in Temperaturgleichgewicht mit der Wand, wird auch die von den einfallenden Molekülen an die Wand übertragene Bewegungsgrösse, in der Richtung der Oberfläche, gleich Null werden. —

Ist das Gas in Strömung mit einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit, parallel mit der Wand, bleibt ein Komposant der von den einfallenden Molekülen an die Wand übertragenen Bewegungsgrösse in der Richtung der Oberfläche, bezw. in der Richtung des Stromes, als Rest übrig. — Besitzen die einfallenden Moleküle eine gemeinschaftliche, konstante Massengeschwindigkeit (zusätzliche Geschwindigkeit),  $w$ , in der Richtung des Stromes, wird der Komposant der Bewegungsgrösse in der Richtung der Wand:  $\frac{1}{4} N \bar{\Omega} \cdot w dS'$ .

1) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys., 48, S. 1113, 1915.

4° In dem stationären Strömungszustand ist der Druckgradient in dem zylindrischen, kreisförmigen Rohr konstant und also:  $dp/dl = (p_1 - p_2)/L$ , jedenfalls solange  $dp/dl$  klein ist; hieraus folgt, dass auch  $dN/dl$  konstant ist, wenn die Temperatur der Rohrwand überall dieselbe ist. —

Für das eigentliche Problem der Molekularströmung, d. h. die Bestimmung der durchströmenden Gasmenge in dem stationären Zustand, ist es nicht notwendig, die Geschwindigkeitsverteilung der zurückgeworfenen Moleküle zu kennen; dies erhellt u. a. aus der abgeleiteten Formel:

$$n \cdot m = \frac{2\pi}{3} \cdot m \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{dN}{dl} = \frac{2\pi}{3} \cdot \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{d\varrho}{dl},$$

oder:

$$n \cdot m = \frac{2\pi}{3} \cdot \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{dp}{dl} = \frac{2\pi}{3} \cdot \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{p_1 - p_2}{L},$$

weil hierin nur die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle im Rohr,  $\bar{\Omega}$ , vorkommt; dies wird auch bestätigt dadurch, dass es möglich ist, diese Formel durch Wahrscheinlichkeitsberechnungen abzuleiten, wie von P. CLAUSING<sup>1)</sup> und R. DARBORD<sup>2)</sup> dargetan.

Wünscht man aber eine Bestimmung der durch die Molekularströmung transportierten Energie und Bewegungsgrösse, oder führt man in die kinetischen Formeln thermodynamische Grössen ein, um die beobachteten Werte mit den theoretischen Werten zu vergleichen, wird es notwendig, ein Verteilungsgesetz der Molekulargeschwindigkeiten einzuführen.

Wenn die Moleküle nicht unendlich klein sind, so dass gegenseitige Stösse vorkommen, und wird — jedenfalls annäherungsweise — angenommen, dass sich das Gas im Rohr thermisch und mechanisch im Gleichgewicht befindet, wird das Verteilungsgesetz<sup>3)</sup> das MAXWELL'sche sein müssen, woraus folgt, dass:

$$\frac{\pi}{8} \cdot \bar{\Omega}^2 = \frac{1}{3} \cdot \bar{\Omega}^2.$$

1) P. CLAUSING: Dissertatie, Leiden, S. 106, 1928. — Physica, Bd. 9, S. 65, bezw. 75, 1929.

2) R. DARBORD: Journ. de Physique, VII, S. 345, 1932

3) MARTIN KNUDSEN: The Kinetic Theory of Gases, London, 1934.

Im folgenden, wo wir versuchen wollen, den Einfluss einzelner, gegenseitiger Zusammenstösse auf die stationäre Molekularströmung zu berechnen, werden wir also das MAXWELL'sche Verteilungsgesetz für die Molekulargeschwindigkeiten benutzen.

Ausgehend von den obengenannten Voraussetzungen hat MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> auf einwandfreie Weise durch Addition der Anzahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des kreisförmigen Rohres,  $\pi R^2$ , gehen, die folgende Formel für die durch ein kreisförmiges Rohr strömende Gasmenge, gemessen durch das Produkt von Druck und Volumen,

$$Q_t = \frac{n \cdot m}{1\varrho} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho}} \cdot R^3 \cdot \frac{p_1 - p_2}{L},$$

abgeleitet.

Später hat M. VON SMOLUCHOWSKI<sup>2)</sup> diese Ableitung verallgemeinert und näher beleuchtet, indem er darauf hingewiesen hat, dass die durch ein Element,  $dS$ , des Querschnittes,  $\pi R^2$ , durchströmende Menge,  $dQ_t$ , nicht über den Querschnitt des kreisförmigen Rohres konstant ist, sondern von der Entfernung der Rohrachse abhängt. —

Im folgenden werde ich in etwa der Darstellung von J. TER HEERDT<sup>3)</sup> folgen:

Wir wollen ein sehr langes, zylindrisches Rohr mit beliebigem Querschnitt, für welches die Bedingungen:  $\lambda \rightarrow \infty$ , bzw.  $a/\lambda = 0$ , und  $\frac{a}{L} \ll 1$ , erfüllt sind, betrachten;  $a$  bezeichnet hier die mittlere oder grösste lineäre Abmessung des Querschnittes. Für ein solches Rohr darf man den Einfluss der Endfläche vernachlässigen.

In dem stationären Strömungszustand muss, der Erhaltung der Masse und Bewegungsgrösse wegen, das folgende gelten:

In dem stationären Strömungszustand muss, der Erhaltung der Masse und Bewegungsgrösse wegen, das folgende gelten:

*a.* Jedes Wandelement des Rohres,  $dS'$ , muss in der Zeiteinheit dieselbe Anzahl von Molekülen empfangen und ausstrahlen, d. h. dieselbe Anzahl von Molekülen, welche in der Zeiteinheit gegen das Wandelement,  $dS'$ , stossen, muss auch in der Zeiteinheit von  $dS'$  ausgestrahlt werden. —

1) MARTIN KNUDSEN: loc. cit. (1), S. 105—108.

2) M. VON SMOLUCHOWSKI: Ann. d. Phys., 33, S. 1559, 1910.

3) J. TER HEERDT: Dissertatie, Utrecht, S. 44—48, 1923.

b. Die an die Rohrwand übertragene Bewegungsgröße in der Richtung der Achse muss der Differenz in Bewegungsgröße der durch die Endfläche ein — und ausströmenden Moleküle gleich sein. —

Unter Berücksichtigung des Cosinusgesetzes ergibt sich, dass ein Wanelement  $dS'$  (vgl. Fig. 4), für welches  $l = 0$  gesetzt

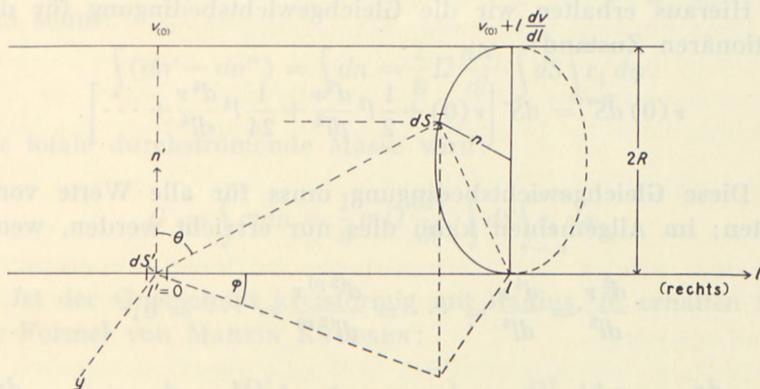


Fig. 4.

wird, in der Zeiteinheit eine Anzahl von Molekülen:  $\frac{1}{4} N \bar{\Omega} dS' = v(0) dS'$ , ausstrahlt; andererseits wird das Element,  $dS'$ , von einer Anzahl von Molekülen,  $dn_1$ , die von der rechten Seite des Rohres kommen, getroffen, wo:

$$dn_1 = dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} v(l) \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi;$$

$v(l)$  ist der Wert von  $\frac{1}{4} N \bar{\Omega}$  im Abstände  $l$ .

Von der linken Seite des Rohres empfängt  $dS'$  die Anzahl:

$$dn_2 = dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} v(-l) \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi,$$



$$dn' = dS \left[ v(0) + \frac{1}{\pi} \frac{dv}{dl} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot \theta \cdot \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 \, d\varphi \right]$$

und

$$dn'' = dS \left[ v(0) - \frac{1}{\pi} \frac{dv}{dl} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot \theta \cdot \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 \, d\varphi \right],$$

und somit:

$$\int (dn' - dn'') = \int dn = \frac{1}{8} \bar{\Omega} \frac{dN}{dl} \cdot \int dS \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 \, d\varphi.$$

Die totale durchströmende Masse wird:

$$G' = \int m dn = \frac{1}{8} m \bar{\Omega} \frac{dN}{dl} \cdot \int dS \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 \, d\varphi.$$

Ist der Querschnitt kreisförmig mit Radius,  $R$ , erhalten wir die Formel von MARTIN KNUDSEN:

$$G' = \frac{1}{8} m \bar{\Omega} \frac{dN}{dl} \int dS \int r_1 \, d\varphi = \frac{1}{8} m \bar{\Omega} \frac{dN}{dl} \cdot \frac{16 \pi}{3} R^3,$$

oder:

$$G' = \frac{2 \pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl}.$$

Betrachten wir ein Element,  $dS_1$ , am Rande des kreisförmigen Querschnitts, bekommen wir, weil  $r_1 = 2 R \cos \varphi$ :

$$dG'_r = dS_1 \cdot \frac{1}{2} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl},$$

und für ein Element,  $dS_2$ , in der Mitte des kreisförmigen Querschnitts, da  $r_1 = R$ :

$$dG'_m = dS_2 \cdot \frac{\pi}{4} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl}.$$

Diese Variation über den Querschnitt ist zuerst von M. von SMOLUCHOWSKI dargelegt worden. —

Wird für die durchströmenden Moleküle eine mittlere, hypothetische Strömungsgeschwindigkeit,  $v$ , eingeführt und wird diese definiert durch:

$$dG' = m \cdot N \cdot v \cdot dS,$$

erhält man: 
$$v_{\text{Mitte}} = \frac{\pi}{4} R \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl},$$

$$v_{\text{Rand}} = \frac{1}{2} R \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl}$$

und  $v_{\text{Mittel}} = \frac{2}{3} R \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl}$ , gültig für den ganzen Querschnitt. —

Die Aufmerksamkeit muss aber darauf gerichtet werden, dass die Moleküle im Inneren des Rohres *keine* gemeinschaftliche Massengeschwindigkeit (zusätzliche Geschwindigkeit) in der Richtung der Achse besitzen, weil alle im Rohr anwesenden Moleküle direkt von der Wand kommen, wenn  $R/\lambda = 0$  und  $\frac{a}{L} \ll 1$ ; an der Rohrwand sind diese Moleküle nach dem Cosinusetz zurückgeworfen worden und besitzen darum im Mittel nur die molekulare Geschwindigkeit, die der konstanten Temperatur der Rohrwand entspricht.

Besitzen die ausgestrahlten Moleküle Geschwindigkeiten in Übereinstimmung mit dem MAXWELL'schen Geschwindigkeitsver-

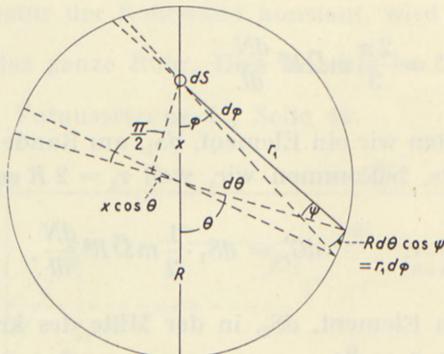


Fig. 6.

teilungsgesetz, werden die Moleküle mit den grössten Geschwindigkeiten am schnellsten durch das Rohr kommen. —

Die rein molekulare Strömung ist, auch in Verbindung mit dem konstanten Dichtheitsgradienten,  $dN/dl$ , als eine Diffusionsströmung mit einem von dem Druck unabhängigen Diffusionskoeffizienten aufzufassen; in diesem Falle, d. h.  $R/\lambda = 0$ , wird der Widerstand *nicht* durch ein anderes Gas, sondern durch die Wand geleistet. —

Für einen kreisförmigen Querschnitt des zylindrischen Strömungsrohres ist es nicht ohne Interesse zu untersuchen, auf welche Weise sich  $v$  und  $\frac{dv}{dx}$ , wenn  $x$  die Entfernung des Elementes  $dS$  von der Achse angibt, (vgl. Fig. 6) mit dem Wert von  $x$  ändern. —

Integrieren wir den Ausdruck für  $dG'$  über konzentrische Kreisinge, erhalten wir leicht, weil:

$$r_1 d\varphi = R \cdot d\theta \cdot \cos \psi,$$

$$dG' = \frac{1}{8} m \bar{\Omega} \frac{dN}{dl} dS \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R + x \cos \theta}{\sqrt{R^2 + x^2 + 2 R x \cos \theta}} d\theta = dS \cdot mN \cdot v_x$$

und also:

$$v_x = \frac{1}{8} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R + x \cos \theta}{\sqrt{R^2 + x^2 + 2 R x \cos \theta}} d\theta,$$

oder, wenn  $\theta = 2\theta_1$ ,  $k^2 = \frac{4 R x}{(R+x)^2}$  und  $\frac{R+x}{2R} = \varepsilon$ :

$$v_x = \frac{1}{2} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}} d\theta_1 + \varepsilon \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1} d\theta_1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}} d\theta_1 \right) \right],$$

und somit:

$$v_x = \frac{1}{2} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl} [(1-\varepsilon)K + \varepsilon \cdot E] = \frac{1}{2} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl} \cdot \varepsilon [k' \cdot K + E],$$

wenn:  $k'^2 = 1 - k^2$ , und also:  $k' = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{R-x}{R+x}$ .

$K$  und  $E$  sind die vollständigen, elliptischen Integrale 1<sup>ster</sup> und 2<sup>ter</sup> Gattung; der Modul,  $k = \sin \alpha$ , ist gegeben durch  $\sin^2 \alpha =$

$4R \cdot \frac{x}{(R+x)^2}$ , während der komplementäre Modul,  $k'$ , wird:  
 $k' = \frac{R-x}{R+x}$ , da  $k'^2 = 1 - k^2$ , und also:  $1 - \varepsilon = k' \cdot \varepsilon$ .

Durch diesen Ausdruck für  $v_x$  ist der Wert von  $v$  in jeder Entfernung,  $x$ , von der Achse bestimmt und kann mit Hilfe der bekannten Tabellen<sup>1)</sup> für  $K$  und  $E$  berechnet werden; in Fig. 7

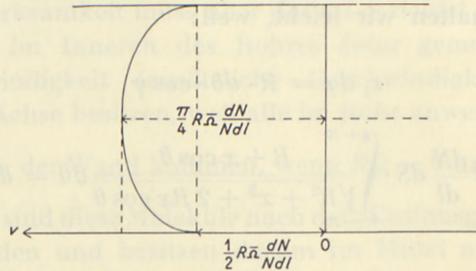


Fig. 7.

ist der Verlauf von  $v$  für einen kreisförmigen Querschnitt dargestellt.

Für die Mitte des Querschnitts ( $x = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $k = 0$  und  $k' = 1$ ) und für den Rand des Querschnitts ( $x = R$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $k = 1$  und  $k' = 0$ ) erhalten wir selbstverständlich dieselben Werte, wie oben auf direkte Weise abgeleitet.

Verwenden wir die bekannten Reihenentwicklungen für  $K$  und  $E$  für  $x \rightarrow 0$ , bzw.  $k \rightarrow 0$ , oder für  $x \geq R$ , bzw.  $k' \rightarrow 0$ , erhalten wir den Verlauf von  $v$  in der Mitte und am Rande des Querschnitts. —

Wir finden z. B. an der Rohrwand, bzw.  $k' \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow R} v_x = \frac{1}{4} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl} \left[ 1 + \frac{x}{R} \right] \left[ 1 + \Delta k' + \frac{1}{2} \left( \Delta - \frac{1}{2} \right) k'^2 + \frac{1}{4} (\Delta - 1) k'^3 + \dots \right],$$

wo:

$$\Delta = \ln \left( \frac{4}{k'} \right).$$

1) Siehe z. B.: Tables of Functions by EUGEN JAHNKE and FRITZ EMDE, Fourth Edition, Dover Publications, New York, p. 73, 1945.

Auf ganz analoge Weise ergibt sich:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{4} \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl} \cdot \frac{1}{k^2 \varepsilon} [(2 - k^2) K - 2 E],$$

woraus folgt:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{\text{Rand}} = \infty \quad \text{und} \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{\text{Mitte}} = 0;$$

das letzte Resultat war auch aus Symmetriegründen zu erwarten.

Es ist einfach, durch die Annäherungsformeln für  $K$  und  $E$  für  $x \geq R$ , bzw.  $k' \rightarrow 0$ , den Verlauf von  $\frac{dv}{dx}$  an der Rohrwand abzuleiten; man erhält, weil:

$$k^2 \cdot \varepsilon = \frac{2x}{R+x} \quad \text{und} \quad \Delta = \ln\left(\frac{4}{k'}\right),$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x \geq R} = -\frac{1}{4} \bar{\Omega} \frac{dN}{Ndl} \cdot \frac{R+x}{2x} \left[ \Delta - 2 + \frac{1}{4} (\Delta + 1) k'^2 + \frac{1}{64} \left( \Delta - \frac{1}{2} \right) k'^4 \dots \right].$$

Es erhellt aus diesen Formeln, dass der Verlauf von  $v$  und  $\frac{dv}{dx}$  an der festen Wand, selbst im rein molekularen Zustand der Gase sehr kompliziert ist, so dass es nicht überraschen kann, wenn es für den MAXWELL'schen Zustand der Gase bis jetzt noch nicht gelungen ist, die Geschwindigkeitsverteilung für ein längs einer festen Wand strömendes Gas abzuleiten. —

In § 2 ist erwähnt worden, dass der kinetische Zustand des Gases an der festen Wand — auch in dem MAXWELL'schen Zustand der Gase — innerhalb eines Abstandes von der Wand, entsprechend der freien Weglänge,  $\lambda$ , oder einem Bruchteil hiervon, analog und vergleichbar ist mit dem Zustand an der Wand in der reinen Molekularströmung. Besteht also in dem Gase ein Konzentrationsgradient,  $\frac{dN}{dl}$ , parallel mit der Wand, und gilt für die an der Wand zurückgeworfenen Moleküle das Cosinusetz, können wir auf Grund dieser Analogie die folgende Schätzung für  $k_2$  vornehmen:

$$v_{x=R} = \frac{1}{2} \bar{\Omega} R \cdot \frac{dN}{N dl} = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} \bar{\Omega} R \cdot \frac{dN}{N dl},$$

oder:

$$k_2 = \frac{4}{\pi} = \text{ca. } 1,27.$$

Die durch ein Element im Querschnitt,  $dS$ , strömenden Moleküle transportieren in der Richtung der Achse eine Bewegungsgrösse,  $dM$ , und ausserdem eine Energie,  $dE$ .

Die von rechts kommenden Moleküle transportieren durch,  $dS$ , eine Bewegungsgrösse,  $dM_r$ , wo:

$$dM_r = dS \left[ \frac{1}{6} N m \bar{\Omega}^2 + \frac{1}{6\pi} \cdot m \bar{\Omega}^2 \frac{dN}{dl} \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 d\varphi \right],$$

und die von links kommenden Moleküle eine Bewegungsgrösse,  $dM_l$ , wo:

$$dM_l = dS \left[ \frac{1}{6} N m \bar{\Omega}^2 - \frac{1}{6\pi} m \bar{\Omega}^2 \frac{dN}{dl} \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 d\varphi \right].$$

Aus der Summe:

$$dM_r + dM_l = \frac{1}{3} N m \bar{\Omega}^2 dS = p dS,$$

geht hervor, dass der Druck  $p$  überall im Querschnitt derselbe ist und also auch der Wert von  $N$ , wenn die Temperatur konstant ist.

Aus der Differenz:  $dM_r - dM_l$ , erhellt, dass die totale Bewegungsgrösse, die durch den ganzen Querschnitt,  $\int dS$ , strömt:

$$\int dM = \int d(M_r - M_l) = \frac{1}{3\pi} m \bar{\Omega}^2 \frac{dN}{dl} \int dS \int r_1 d\varphi,$$

konstant ist, weil  $\frac{dN}{dl}$  konstant ist, und also unabhängig von  $l$ , bzw. unabhängig von der Lage des Querschnitts im Rohr.

Die Bewegungsgrösse pro Molekül wird für die durchströmenden Moleküle:

$$\frac{\frac{1}{3\pi} m \overline{\Omega^2} \frac{dN}{dl} \cdot dS \int r_1 d\varphi}{\frac{1}{8} \overline{\Omega} \frac{dN}{dl} \cdot dS \int r_1 d\varphi} = \frac{8}{3\pi} m \frac{\overline{\Omega^2}}{\overline{\Omega}}.$$

Dieser Ausdruck wird, wenn das MAXWELL'sche Verteilungsgesetz gilt:

$$\frac{8}{3\pi} \cdot m \frac{\overline{\Omega^2}}{\overline{\Omega}} = \frac{8}{3\pi} m \cdot \frac{3\pi}{8} \frac{\overline{\Omega}^2}{\overline{\Omega}} = m \overline{\Omega}.$$

Hieraus erhellt, dass in der Molekularströmung die durch ein Element des Querschnitts strömenden Moleküle im Mittel eine Geschwindigkeit in der Richtung der Achse,  $\overline{\Omega}$ , besitzen.

Für die mittlere Energie der durchströmenden Moleküle erhalten wir in derselben Weise:

$$dE = \frac{1}{4\pi} m \overline{\Omega^3} \frac{dN}{dl} dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \int r_1 d\varphi,$$

woraus:

$$dE = \frac{1}{16} m \overline{\Omega^3} \frac{dN}{dl} \cdot dS \int r_1 d\varphi,$$

oder pro Molekül:

$$E_1 = \frac{1}{2} m \frac{\overline{\Omega^3}}{\overline{\Omega}}.$$

Wenn das MAXWELL'sche Verteilungsgesetz gilt, ist aber  $\overline{\Omega^3} = \frac{4}{3} \overline{\Omega} \cdot \overline{\Omega^2}$ , und demnach:

$$E_1 = \frac{1}{2} m \frac{\overline{\Omega^3}}{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{4}{3} \overline{\Omega^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} kT = 2kT,$$

ein Resultat, das ich bereits früher abgeleitet habe<sup>1)</sup>.

Wir werden nun durch eine direkte Berechnung die Bewegungsgröße, welche ein Element der Rohrwand,  $dS'$ , von den strömenden Molekülen empfängt, ableiten. —

1) SOPHUS WEBER: Z. f. Phys., Bd. 24, S. 267, 1924.

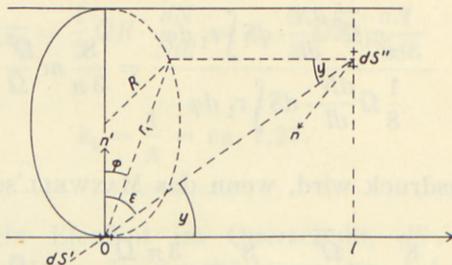


Fig. 8.

Das Wandelement,  $dS'$ , (vgl. Fig. 8) wird von einer Anzahl von Molekülen, von rechts, bezw. links kommend, getroffen:

Die Anzahl von rechts wird:

$$dq_r \cdot dS' = \frac{1}{4\pi} \left( N_0 \bar{\Omega} - \frac{d(N\bar{\Omega})}{dl} \cdot l \right) \cos \varepsilon \sin y \, dy \, d\varphi \cdot dS',$$

und von links:

$$dq_l \cdot dS' = \frac{1}{4\pi} \left( N_0 \bar{\Omega} - \frac{d(N\bar{\Omega})}{dl} l \right) \cos \varepsilon \sin y \, dy \, d\varphi \cdot dS'.$$

Aus der Summe:

$$dS' \int d(q_r + q_l) = \frac{1}{2\pi} N_0 \bar{\Omega} \cdot dS' \int \cos \varepsilon \sin y \, dy \, d\varphi,$$

ergibt sich, weil:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \sin y \cos \varphi, \\ (q_r + q_l) dS' &= \frac{1}{2\pi} N_0 \bar{\Omega} dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y \, dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} N_0 \bar{\Omega} dS' = \nu(0) dS', \end{aligned}$$

in Übereinstimmung damit, dass das Element,  $dS'$ , dieselbe Anzahl von Molekülen empfängt und ausstrahlt (vgl. Bedingung  $\alpha$ , Seite 50).

Diese Moleküle geben dem Element  $dS'$  in der Richtung der Normale von  $dS'$  die Bewegungsgröße:

$$\begin{aligned}
 dM_n &= dS' \int m\Omega \cdot \frac{1}{2\pi} N_0 \Omega \cdot \cos^2 \varepsilon \sin y \, dy \, d\varphi \\
 &= dS' \cdot \frac{1}{2\pi} m N_0 \overline{\Omega^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 y \, dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{6} m N_0 \overline{\Omega^2} dS' = \frac{1}{2} p \, dS',
 \end{aligned}$$

wozu eine weitere Bewegungsgrösse,  $\frac{1}{2} p \, dS'$ , nach Zurückwerfung der Moleküle kommt, wie auch zu erwarten war.

In der Richtung der Achse erhält das Wandelement  $dS'$  die Bewegungsgrösse:

$$dM_A = dS' \cdot \frac{1}{2\pi} m \overline{\Omega^2} \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \int 2 R \cos^2 y \, dy \cos \varepsilon \cos \varphi \, d\varphi,$$

weil:  $l = 2 R \cos \varphi \cot y$ .

Da:  $\cos \varepsilon = \sin y \cdot \cos \varphi$ , erhält man:

$$dM_A = dS' \cdot \frac{1}{2\pi} m \overline{\Omega^2} \cdot \frac{dN}{dl} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 R \cos^2 y \sin y \, dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi,$$

oder:

$$dM_A = B \, dS' = \frac{1}{6} m \overline{\Omega^2} \cdot \frac{dN}{dl} \cdot R \, dS',$$

und also für ein Ringelement der Wand:

$$dS' = 2 \pi R \cdot dl,$$

$$dM_A = B \, dS' = \frac{1}{6} m \overline{\Omega^2} R \cdot \frac{dN}{dl} \cdot 2 \pi R \, dl = \pi R^2 \cdot \frac{dp}{dl} \, dl,$$

in Übereinstimmung mit der Bedingung  $b$ , Seite 51. —

Diese Bedingung  $b$  folgt auch daraus, dass die durch einen Querschnitt des Rohres strömende Bewegungsgrösse konstant ist, und also unabhängig von der Lage des Querschnitts. Um dies

zu sehen, betrachten wir ein Raumelement, bestehend aus zwei Querschnitten, 1 bzw. 2, und einem Ringelement:  $2 \pi R dl = dS'$  (vgl. Fig. 9). Nennen wir die Drucke in den Querschnitten 1 und 2,  $p_1$  und  $p_2$ , muss für dies Raumelement in dem stationären Zustande wegen der Erhaltung der Bewegungsgröße gelten:

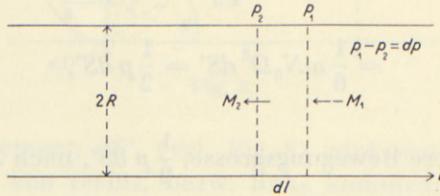


Fig. 9.

$$M_1 \cdot \pi R^2 + B dS' - M_2 \cdot \pi R^2 = \pi R^2 \cdot \frac{dp}{dl} dl,$$

wo  $dS' = 2 \pi R dl$ . Da nachgewiesen ist, dass:

$$M_1 \cdot \pi R^2 = M_2 \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi m \bar{\Omega}^2 \int dS \int r_1 d\varphi,$$

erhält man:

$$B dS' = \pi R^2 \frac{dp}{dl} dl = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot R dS',$$

wie oben auf gaskinetische Weise abgeleitet worden ist.

Wir ersehen also auch hieraus, dass in der Molekularströmung die durch den Druckfall:  $\left(\frac{dp}{dl} dl\right)$ , hervorgebrachte Bewegungsgröße ganz und gar auf das Rohrstück,  $2 \pi R dl = dS'$ , übergeht.

Aus dem Ausdruck:  $B dS' = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot R dS'$ , erhellt, dass den strömenden Molekülen in der reinen Molekularströmung keine konstante Massengeschwindigkeit (zusätzliche Geschwindigkeit),  $v = \frac{2}{3} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Nd l}$ , in der Richtung der Achse beigemessen werden kann.

Wäre dies der Fall, würde man finden:

$$B' dS' = \frac{1}{4} N \bar{\Omega} \cdot m \cdot \frac{2}{3} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl} \cdot dS' = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot R dS'$$

und somit, weil:

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{8}{3\pi} \cdot \bar{\Omega}^2;$$

$$B' dS' = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot R dS'.$$

Dieser Ausdruck ist aber  $\frac{8}{3\pi}$  mal zu klein, weil  $B dS' = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot R dS'$  sein muss.

Wünscht man also die Formeln der Molekularströmung nicht durch Addition der einzelnen Moleküle, sondern durch hydrodynamische Betrachtungen, abzuleiten, und führt man zu diesem Zweck eine Strömungsgeschwindigkeit,  $v = \frac{1}{\rho} \frac{dG'}{dS}$ , ein, ersehen wir aus dem Ausdruck für  $B dS'$ , dass jedem Molekül eine hypothetische, zusätzliche Geschwindigkeit, proportional mit der eigenen Molekulargeschwindigkeit,  $\bar{\Omega}$ , beigemessen werden muss, wie MARTIN KNUDSEN dies in seiner zweiten Ableitung getan hat; in diesem Falle muss also, wenn die mittlere Geschwindigkeit der strömenden Moleküle,  $v = \frac{2}{3} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl}$ , gesetzt wird, die von MARTIN KNUDSEN angegebene Formel:

$$B dS' = \frac{3\pi}{32} \cdot Nm \bar{\Omega} v \cdot dS',$$

verwendet werden, weil sich nur dann der richtige Wert von  $B = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dl}$  herausstellt.

Die Formel  $B dS' = \frac{3\pi}{32} \cdot Nm \bar{\Omega} v \cdot dS'$  ist später von MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> näher erläutert worden; dies ist aber m. E. von verschiedenen späteren Forschern<sup>2)</sup> nicht hinreichend verstanden worden.

1) MARTIN KNUDSEN: Ann d. Phys., Bd. 34, S. 823, 1911.

2) J. A. H. TER HEERDT: loc. cit. S. 46; Vgl. auch EARLE H. KENNARD: loc. cit. S. 305.

Da die Moleküle in der reinen Molekularströmung, für welche  $R/\lambda = 0$ , keine gemeinschaftliche, konstante Massengeschwindigkeit (zusätzliche Geschwindigkeit) besitzen, ist die Molekularströmung eine Diffusionserscheinung, für welche die treibende Kraft der Druckfall, bezw. der Dichtheitsgradient, ist, während der Diffusionswiderstand durch die Rohrwand geleistet wird.

Die Diffusionsgeschwindigkeit der Moleküle in der Richtung der Kraft ist durch die totale in der Zeiteinheit durch  $1 \text{ cm}^2$  des Querschnitts diffundierende Masse bestimmt.

Für ein kreisförmiges Rohr mit Radius,  $R$ , erhalten wir für die mittlere Diffusionsgeschwindigkeit,  $v_d$ , wenn  $\frac{R}{\lambda} = 0$ , aus:

$$\begin{aligned} G' &= \frac{2\pi}{3} m \bar{\rho} R^3 \cdot \frac{dN}{dl} = \pi R^2 \cdot mN \cdot v_d \\ &= m \cdot D_{11,0} \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2, \end{aligned}$$

$$\text{den Wert: } v_d = \frac{2}{3} \bar{\rho} R \frac{dN}{Nd l} \quad \text{und somit: } D_{11,0} = \frac{2}{3} \bar{\rho} R.$$

Für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$  haben wir für den Selbstdiffusionskoeffizienten — annäherungsweise — früher abgeleitet:

$$D_{11,p} = \frac{1}{3} \bar{\rho} \lambda \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}}, \quad \text{woraus: } D_{11,0} = \frac{2}{3} \bar{\rho} R,$$

in Übereinstimmung mit dem obengenannten Resultat aus der Molekularströmung. —

Wir ersehen also auch hieraus, dass die Molekularströmung einen Grenzfall der Selbstdiffusionsströmung darstellt.

§ 6. Wir werden nun zu bestimmen versuchen, wie die stationäre Molekularströmung beeinflusst und geändert wird, wenn gegenseitige Zusammenstöße der Moleküle im Inneren des Rohres einsetzen, d. h., wenn der Zustand durch  $R/\lambda \rightarrow 0$  charakterisiert ist. Ausserdem muss in diesem Falle auch die Bedingung,  $R/L \rightarrow 0$ , erfüllt sein.

Aus den Beobachtungen von MARTIN KNUDSEN geht hervor, dass auch in diesem Gebiet die durchströmende Menge,  $Q_t$ , proportional ist mit  $\frac{dp}{dl}$ , bezw.  $\frac{dN}{dl}$ , wenn die Temperatur konstant ist; dies gilt jedenfalls, wenn  $\frac{dp}{dl}$  klein ist.

Wir werden also einfachheitshalber auch für dies Gebiet annehmen, dass  $dp/dl$ , bezw.  $dN/dl$ , unter den gegebenen Umständen konstant ist; weiter wollen wir annehmen, dass die Moleküle

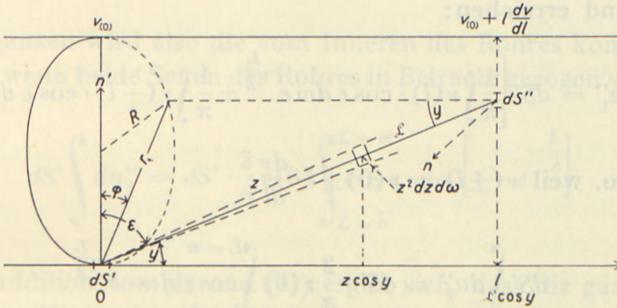


Fig. 10.

als harte elastische Kugeln aufgefasst werden können, woraus folgt, dass die Moleküle, welche von gegenseitigen Zusammenstößen kommen, gleichmäßig in allen Richtungen des Raumes ausgestrahlt werden, und dass das Cosinusetz für die an der Rohrwand zurückgeworfenen Moleküle gilt.

Ausgehend von diesen Voraussetzungen werden wir wieder ein Wandelement  $dS'$  der Rohrwand betrachten und nachweisen, dass auch in diesem Falle die Bedingung  $a$  (Seite 50), d. h. dass dieselbe Anzahl von Molekülen, welche in der Zeiteinheit gegen  $dS'$  stossen, auch in der Zeiteinheit von  $dS'$  ausgestrahlt wird, erfüllt ist.

Ein Wandelement  $dS''$  im Abstände  $L$  von  $dS'$ , für welches  $l = 0$  gesetzt wird, strahlt in der Zeiteinheit  $dn_1$  Moleküle aus, die gegen  $dS'$  gerichtet sind, wo:

$$dn_1 \cdot dS' = dS' \cdot \frac{1}{\pi} \nu(l) \cdot \cos \epsilon \, d\omega,$$

wenn:

$$d\omega = \frac{dS' \cos \epsilon}{L^2} \quad \text{und} \quad \nu(l) = \frac{1}{4} N \bar{Q}.$$

Sind keine gegenseitigen Zusammenstösse im Rohr vorhanden, werden diese  $dn_1$  Moleküle  $dS'$  erreichen; sind aber gegenseitige Zusammenstösse vorhanden, wird nur die Anzahl  $dn_1'$ , wo:

$$dn_1' \cdot dS' = dS' \cdot \frac{1}{\pi} v(l) \cos \varepsilon d\omega \cdot e^{-\frac{L}{\lambda}},$$

$dS'$  erreichen.

Wenn beide Seiten des Rohres in Betracht gezogen werden, wird die Gesamtzahl der Moleküle, welche  $dS'$  von der ganzen Rohrwand erreichen:

$$dS' \int dn_1'' = dS' \left[ \frac{1}{\pi} \int v(l) \cdot \cos \varepsilon d\omega e^{-\frac{L}{\lambda}} + \frac{1}{\pi} \int v(-l) \cdot \cos \varepsilon d\omega e^{-\frac{L}{\lambda}} \right]$$

und also, weil  $v(\pm l) = v(0) \pm l \cdot \frac{dv}{dl}$ :

$$(I) \quad dS' \int dn_1'' = dS' \cdot \frac{2}{\pi} v(0) \int_{L=0}^{L=\infty} \cos \varepsilon d\omega \cdot e^{-\frac{L}{\lambda}}.$$

Ausserdem empfängt  $dS'$ , wenn gegenseitige Zusammenstösse vorhanden sind, eine Anzahl von Molekülen,  $dn_2$ , von dem Raumelement  $z^2 dz d\omega$  in dem Abstände  $z$  von  $dS'$  (vgl. Fig. 10).

Für  $dn_2$  können wir in der folgenden Weise einen Ausdruck ableiten: Gibt es in der Volumeneinheit  $N$  Moleküle mit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{Q}$ , und ist  $\lambda$  die mittlere freie Weglänge im freien Gase mit  $N$  Molekülen in der Volumeneinheit, werden diese Moleküle  $\frac{N\bar{Q}}{\lambda}$  mal in der Sekunde gestossen werden.

Von den Molekülen des Raumelementes, dessen Abmessungen klein sind  $\lambda$  gegenüber, gehen also in der Zeiteinheit  $\frac{N\bar{Q}}{\lambda} \cdot z^2 dz d\omega$  aus, die direkt von Zusammenstössen kommen. Von diesen ist, wenn sie gleichmässig in alle Richtungen ausgestrahlt werden, ein Teil:  $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\cos \varepsilon}{z^2} dS'$ , gegen das Wandelement  $dS'$  gerichtet, also im ganzen eine Anzahl von:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot dS' \cdot \frac{\cos \varepsilon}{z^2} \cdot \frac{N\bar{Q}}{\lambda} \cdot z^2 dz d\omega,$$

wovon nur der Bruchteil  $e^{-\frac{z}{\lambda}}$  das Wandelement  $dS'$  erreichen wird.  $dS'$  empfängt also von dem ganzen Raumwinkel  $d\omega$  die Anzahl:

$$dn_2' \cdot dS' = dS' \int_{z=0}^{z=L} \frac{1}{\pi} \left( v(0) + \frac{dv}{dl} \cdot l \right) \frac{d\omega}{\lambda} \cdot \cos \varepsilon \cdot e^{-\frac{z}{\lambda}} dz,$$

wo:

$$v(0) = \frac{1}{4} N_0 \bar{\Omega} \quad \text{und} \quad l = z \cos \gamma.$$

Im ganzen wird also die vom Inneren des Rohres kommende Anzahl, wenn beide Seiten des Rohres in Betracht gezogen werden:

$$(II) \quad dS' \int dn_2'' = dS' \cdot \frac{2}{\pi} v(0) \int_{L=0}^{L=\infty} \cos \varepsilon \cdot d\omega \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right].$$

Durch Addition von (I) und (II) ergibt sich, dass die ganze Anzahl, die  $dS'$  in der Zeiteinheit von der Rohrwand und vom Inneren des Rohres empfängt, beträgt:

$$dS' \int (dn_1'' + dn_2'') = dS' \cdot \frac{2}{\pi} v(0) \int \cos \varepsilon d\omega = v(0) dS',$$

also dieselbe Anzahl, die in der Zeiteinheit von  $dS'$  ausgestrahlt wird. —

Hieraus erhellt, dass auch in dem Falle, wo gegenseitige Zusammenstöße vorhanden sind, die Formel:

$$v(\pm l) = v(0) \pm \frac{dv}{dl} l,$$

in welcher  $\frac{dv}{dl}$ , bzw.  $\frac{dN}{dl}$ , eine Konstante darstellt, in Übereinstimmung mit der Bedingung  $a$ , Seite 50, ist. —

Die Anzahl der gegenseitigen Zusammenstöße der Moleküle im Inneren des Rohres ist  $n = \frac{N\bar{\Omega}}{\lambda}$  in der Raumeinheit und also an jeder Stelle proportional mit dem dortigen  $N$ ; da  $\frac{dN}{dl}$  kon-

stant ist, kann also angenommen werden, dass  $\frac{dn}{dl}$  auch unabhängig von  $l$  wird, wenn wir die kleine Variation von  $\lambda$  vernachlässigen; dies ist erlaubt, wenn  $\frac{dN}{dl}$  klein ist. Wir haben ausserdem für die reine Molekularströmung gefunden, dass der Druck  $p$ , bzw.  $N$ , überall in demselben Querschnitt als eine Konstante angesehen werden kann, so dass dies auch mit  $n$  der Fall sein wird. —

Wir werden nun die Moleküle, die von direkten gegenseitigen Zusammenstössen im Rohr kommen, näher betrachten.

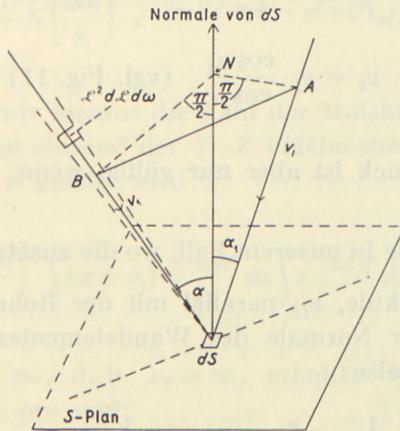
Mit wachsenden Werten von  $R/\lambda$  werden diese Moleküle, des Konzentrationsgradienten,  $\frac{dn}{dl}$ , wegen, eine Diffusionsströmung in der Richtung der Achse veranlassen; solange nur ganz vereinzelte, gegenseitige Zusammenstösse vorhanden sind, dürfen wir annehmen, dass beide zusammenstossenden Moleküle direkt von der Rohrwand kommen und also vor dem Zusammenstoss nach dem Cosinusetz im Mittel die molekulare Geschwindigkeit  $\bar{Q}$ , entsprechend der Temperatur der Rohrwand, besitzen; man könnte darum geneigt sein anzunehmen, wie es POLLARD und PRESENT<sup>1)</sup> stillschweigend getan haben, dass diese Moleküle nach dem Zusammenstoss auch im Mittel die Molekulargeschwindigkeit  $\bar{Q}$  besitzen und also keine zusätzliche Geschwindigkeit in der Richtung der Achse erhalten haben. Bedenken wir aber, dass wir es in diesem Falle nicht mit gegenseitigen Stössen in einem stillstehenden Gase zu tun haben, sondern mit Zusammenstössen in einem Gase, worin ein Dichtheitsgradient vorhanden ist, so hat z. B. ein Molekül, von der Wand kommend, eine grössere Wahrscheinlichkeit gegen ein Molekül, von rechts kommend, als gegen ein Molekül, von links kommend, zu stossen. Das Resultat hiervon wird wahrscheinlich sein, dass die von gegenseitigen Zusammenstössen im Inneren des Rohres kommenden Moleküle *im Mittel* eine zusätzliche Geschwindigkeit,  $v_l$ , in der Richtung der Achse, bzw. des Dichtheitsgradienten, und proportional mit diesem bekommen.

Wir werden darum im folgenden damit rechnen, dass dies

1) W. G. POLLARD und R. D. PRESENT: Phys. Rev., Vol. 73, S. 765, 1948.

der Fall ist bei denjenigen Molekülen, die von gegenseitigen Zusammenstößen im Inneren des Rohres kommen und untersuchen, ob sich an obenstehenden Berechnungen hierdurch etwas ändert. Weiter wollen wir untersuchen, welcher Einfluss hiervon auf die durchströmende Menge ausgehen wird, und versuchen, mit Hilfe der Bedingung  $b$  (Seite 51), den Wert von  $v_l$  in dem Zustand:  $\frac{R}{\lambda} \cong 0$ , zu bestimmen. —

MARTIN KNUDSEN<sup>1)</sup> hat bereits die Grundlage dieses Problems in Verbindung mit seinen Untersuchungen über den molekularen



$ABN \neq S\text{-Plan}$

$$v_l \cdot \cos \alpha = v_l \cdot \cos \alpha_1.$$

Für  $L^2 dL d\omega$  ist die Molekülgeschwindigkeit gegen  $dS$ :

$$\bar{Q} + v_l = \left( \bar{Q} + v_l \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} \right).$$

Fig. 11.

Gaswiderstand gegen eine sich bewegende Platte behandelt; ob das Gas ruht und die Platte sich bewegt, oder ob das Gas strömt und die Platte stillsteht, ist selbstverständlich ohne Bedeutung.

Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit,  $v_l$ , durch ein ruhendes Gas und ist die Zahl der Moleküle in einem  $\text{cm}^3$ ,  $N$ , wird ein Oberflächenelement  $dS$  in jeder Sekunde von den Molekülen, welche Geschwindigkeitsrichtungen gegen das Flä-

1) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys., Bd. 46, S. 641, 1915.

chenelement,  $dS$ , im Raumwinkel  $d\omega$  besitzen, eine Anzahl Molekülstöße,  $dn_3$ , erhalten.

Bildet die Normale des Flächenelementes,  $dS$ , mit der Bewegungsrichtung des Körpers den Winkel,  $\alpha_1$ , und bildet weiter die Normale des Flächenelementes mit dem Erzeuger des Raumwinkels  $d\omega$  den Winkel,  $\alpha$ , wird  $dn_3$  nach KNUDSEN bestimmt durch:

$$\begin{aligned} dn_3 &= dS \cdot N \frac{d\omega}{4\pi} (\bar{\Omega} + v_l) \cdot \cos \alpha \\ &= dS \cdot N \frac{d\omega}{4\pi} (\bar{\Omega} \cos \alpha + v_l \cos \alpha_1), \end{aligned}$$

weil:

$$v_1 = v_l \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} \quad (\text{vgl. Fig. 11}).$$

Dieser Ausdruck ist aber nur gültig, wenn:  $\frac{v_l}{\bar{\Omega}} \ll 1$ .

Ist  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ , wie in unserem Fall, wo die zusätzliche Geschwindigkeit der Moleküle,  $v_l$ , parallel mit der Rohrachse und also senkrecht zu der Normale des Wandelementes,  $dS'$ , ist, wird  $\cos \alpha_1 = 0$  und also:

$$dn_3' = dS' \cdot \frac{1}{4\pi} N \bar{\Omega} \int \cos \alpha \, d\omega = \frac{1}{4} N \bar{\Omega} dS' = v(0) dS'.$$

Es erhellt hieraus, wie bereits bekannt, dass eine zusätzliche Geschwindigkeit,  $v_l$ , in dem Falle, wo  $dS'$  ein Wandelement des Rohres darstellt und die zusätzliche Geschwindigkeit parallel mit  $dS'$ , bzw. mit der Achse des Rohres, ist, keinen Einfluss auf die Anzahl der Molekülstöße gegen das Wandelement,  $dS'$ , hat.

Betrachten wir aber ein Element,  $dS$ , in dem Querschnitt des Rohres, wird  $\alpha_1 = 0$  und  $\cos \alpha_1 = 1$ ; in diesem Falle wird die Anzahl der Molekülstöße, welche  $dS$  empfängt:

$$dn_3'' = \frac{1}{4} N \bar{\Omega} \cdot dS + \frac{1}{2} N v_l \cdot dS = \frac{1}{4} N \bar{\Omega} \left[ 1 + 2 \frac{v_l}{\bar{\Omega}} \right] dS,$$

woraus erhellt, wie auch zu erwarten war, dass die durch ein

Element des Querschnitts,  $dS$ , strömende Menge durch die zusätzliche Geschwindigkeit,  $v_l$ , vergrößert wird.

Diese Resultate lassen sich auch auf andere Weise, woraus auch die Grösse der Annäherung erhellt, ableiten; wir können z. B. diese Resultate aus dem bekannten Ausdruck für die MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung eines in der Richtung der X-Achse strömenden Gases ableiten; wie bekannt gilt hierfür:

$$dn = N \left( \frac{hm}{\pi} \right)^{3/2} \cdot e^{-hm[(\xi - v_l)^2 + \eta^2 + \zeta^2]} d\xi d\eta d\zeta.$$

Berechnen wir hieraus die Zahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit gegen ein  $\text{cm}^2$  der Y-Z Fläche stossen, erhalten wir, wenn  $\xi - v_l = x$  gesetzt wird:

$$n = N \left( \frac{hm}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-v_l}^{\infty} (x + v_l) e^{-hm x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hm \eta^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hm \zeta^2} d\zeta.$$

Für  $v_l/\bar{\Omega} \rightarrow \infty$ , d. h.  $v_l \rightarrow \infty$ , erhalten wir, wie auch zu erwarten wäre, pro  $\text{cm}^2$ :

$$n = Nv_l,$$

in Übereinstimmung damit, dass die molekulare Geschwindigkeit,  $\bar{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{\pi hm}}$ , in diesem Falle ohne Bedeutung ist, bzw. dass die Moleküle bezüglich der Molekularbewegung als stillstehend angesehen werden können.

Ist aber  $v_l$  klein im Vergleich mit der mittleren Geschwindigkeit,  $\bar{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{\pi hm}}$ , wird unter Verwendung der bekannten Reihenentwicklung für:  $\int_0^z e^{-z^2} dz$ , leicht gefunden:

$$n = \frac{1}{4} N \bar{\Omega} \left[ 1 + 2 \frac{v_l}{\bar{\Omega}} + \frac{4}{\pi} \left( \frac{v_l}{\bar{\Omega}} \right)^2 - \frac{8}{3\pi^2} \left( \frac{v_l}{\bar{\Omega}} \right)^4 - \dots \right].$$



$$dq'_1 = dS \cdot \frac{2}{\pi} \frac{dv}{dx} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} r_1 e^{-\frac{L}{\lambda}} d\varphi,$$

$$\text{wo } r = \frac{1}{4} N \bar{\Omega}, \quad x = L \cos \theta \quad \text{und} \quad L = \frac{r_1}{\sin \theta}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(I) \quad dq'_1 = dS \cdot \frac{2}{\pi} \frac{dv}{dx} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} L e^{-\frac{L}{\lambda}} d\varphi.$$

Für  $\frac{R}{\lambda} = 0$  und  $\frac{L}{\lambda} \geq 0$  erhält man hieraus den bekannten Ausdruck für die reine, molekulare Diffusionsströmung.

*Teil II:* Für die durch das Element,  $dS$ , strömende Nettoanzahl von Molekülen, welche direkt von gegenseitigen Zusammenstößen im Inneren des Rohres kommen und das Element  $dS$  erreichen, gilt nach dem vorhergehenden Paragraphen, da für diese Moleküle eine mittlere zusätzliche Geschwindigkeit (mittlere Massengeschwindigkeit),  $v_x$ , in der Richtung der Achse vorausgesetzt wird, der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} dq'_2 = dS \int \frac{1}{\pi} \left[ v(0) + \frac{dv}{dx} l \cos \theta \right] \frac{dl}{\lambda} e^{-\frac{l}{\lambda}} \left[ \cos \theta + \frac{v_x}{\bar{\Omega}} \right] d\omega \\ - dS \int \frac{1}{\pi} \left[ v(0) - \frac{dv}{dx} l \cos \theta \right] \frac{dl}{\lambda} e^{-\frac{l}{\lambda}} \left[ \cos \theta - \frac{v_x}{\bar{\Omega}} \right] d\omega, \end{aligned}$$

weil in diesem Falle:  $\cos \alpha_1 = 1$ .

Hieraus erhält man leicht, da:

$$\int_0^L \frac{l}{\lambda} e^{-\frac{l}{\lambda}} dl = \lambda \int_0^L \frac{l}{\lambda} e^{-\frac{l}{\lambda}} d\left(\frac{l}{\lambda}\right) = \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \left( 1 + \frac{L}{\lambda} \right) \right],$$

$$(II) \left\{ \begin{aligned} dq'_2 &= dq'_{2,1} + dq'_{2,2} = \\ &= dS \cdot \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \left( 1 + \frac{L}{\lambda} \right) \right] d\varphi \\ &\quad + dS \cdot \frac{1}{2\pi} N v_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right] d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Wir ersehen hieraus, dass der Ausdruck für Teil (II) zweigliedrig ist; das erste Glied:  $dq'_{2,1}$ , ist bestimmt durch den Konzentrationsgradienten  $dN/dx$ , bzw.  $dn/dx$ , wo  $n = \frac{N\bar{\Omega}}{\lambda}$ , der im Inneren des Rohres zusammenstossenden Moleküle; dies Glied repräsentiert also die Selbstdiffusionsströmung der Moleküle, welche von gegenseitigen Zusammenstößen im Inneren des Rohres kommen; das zweite Glied von (II):  $dq'_{2,2}$ , rührt von der zusätzlichen Geschwindigkeit,  $v_x$ , dieser Moleküle her.

Aus dem Ausdruck (II) ersehen wir weiter, dass  $q'_2 = 0$  für  $L/\lambda = 0$ , wie auch erwartet werden müsste.

Durch Addition von (I) und (II) erhalten wir:

$$\begin{aligned} dq &= dq_1 + dq_2 = d(q'_1 + q'_{2,1}) + dq'_{2,2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} \cdot dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda \left( 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right) d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} v_x \cdot N dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \left( 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right) d\varphi, \end{aligned}$$

wo:

$$L \sin \theta = r_1, \quad q_1 = q'_1 + q'_{2,1} \quad \text{und} \quad q_2 = q'_{2,2}.$$

Aus dem Ausdruck für  $dq$  erhellt, dass wir für  $v_x = 0$  den von W. G. POLLARD und R. D. PRESENT<sup>1)</sup> abgeleiteten Ausdruck erhalten, weil sie der Möglichkeit einer zusätzlichen Geschwindigkeit,  $v_x$ , der Moleküle, die direkt von gegenseitigen Zusammen-

1) POLLARD und PRESENT, loc. cit. S. 766, Formel (15).

stößen im Inneren des Rohres kommen, keine Rechnung getragen haben.

Betrachten wir die Ableitung der Ausdrücke für  $dq_1$  und  $dq_2$ , sehen wir, dass diese Ableitung sich nicht ändert, wenn die Bedingung:  $R/\lambda \geq 0$ , nicht mehr gilt; in diesem Falle muss man aber damit rechnen, dass die hydrodynamische, laminare POISEUILLE-Strömung angefangen hat, so dass noch ein drittes Glied,  $dq_3$ , der Formel für  $dq$  hinzugefügt werden muss; wir werden später auf diesen Zustand zurückkommen. —

Es lässt sich mit Hilfe der Ableitung des Ausdruckes von  $dq$  sehr einfach nachweisen, dass auch, wenn gegenseitige Zusammenstöße der Moleküle vorhanden sind, die durch einen Querschnitt des Rohres,  $\pi R^2$ , strömende Bewegungsgröße konstant und unabhängig von  $x$  ist, jedenfalls wenn  $R/L \ll 1$ , so dass der Einfluss der Endfläche vernachlässigt werden kann; in diesem Falle geht also auch die durch den Druckfall:  $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ , hervorgebrachte Bewegungsgröße vollständig auf das Rohrelement:  $2 \pi R dx$ , über<sup>1)</sup>.

Hierdurch wird es möglich, den Wert von  $v_x$  zu berechnen, weil  $N$ , bzw.  $n = \frac{N\bar{Q}}{\lambda}$ , über den Querschnitt als eine Konstante angenommen werden kann. —

Betrachten wir ein Wandelement  $dS'$  (vgl. Fig. 10), ist es einfach zu sehen, dass  $dS'$ , solange keine hydrodynamische, laminare Strömung von POISEUILLE vorliegt, nur die folgenden Bewegungsgrößen, (a) und (b), in der Richtung der Achse empfängt:

$$(a) \quad dS' \int dM'_1 = \frac{1}{2\pi} m \bar{Q}^2 \cdot \frac{dN}{dx} dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \sin^2 y dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2} - \frac{L}{\lambda}} L e^{-\frac{L}{\lambda}} \cos \varphi d\varphi,$$

herrührend von den Molekülen, die von der Rohrwand kommen und, ohne im Inneren des Rohres gegen andere Moleküle zu stossen,  $dS'$ , erreichen;

1) Vgl. S. 62.

(b)  $dS' \int (dM'_{2,1} + dM'_{2,2})$ , wo:

$$dS' \int dM'_{2,1} = \frac{1}{2\pi} m \bar{\Omega}^2 \frac{dN}{dx} dS' \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \sin^2 y dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda} \left( 1 + \frac{L}{\lambda} \right)} \right] \cos \varphi d\varphi,$$

und

$$dS' \int dM'_{2,2} = \frac{1}{2\pi} m \bar{\Omega} v_x \cdot N dS' \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 y dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right] \cos \varphi d\varphi,$$

herrührend von den Molekülen, welche direkt von gegenseitigen Zusammenstößen im Inneren des Rohres kommen und  $dS'$  erreichen. —

Solange die laminare Strömung von POISEUILLE noch nicht angefangen hat, d. h. solange:  $R/\lambda \geq 0$ , erhalten wir also, wenn  $dS' = 2 \pi R dx$  gesetzt wird:

$$2 \pi R dx \int [d(M'_1 + M'_{2,1}) + dM'_{2,2}] = \pi R^2 \cdot \frac{dp}{dx} dx,$$

oder:

$$2 \pi R dx \int [dM'_1 + dM'_2] = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot \frac{dN}{dx} \cdot R \cdot 2 \pi R dx,$$

und also zur Bestimmung von  $v_x$  die Formel:

$$2 \pi R dx \cdot \frac{1}{2\pi} m \bar{\Omega}^2 \frac{dN}{dx} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \sin^2 y dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right] \cos \varphi d\varphi$$

$$+ 2 \pi R dx \cdot \frac{1}{2\pi} m \bar{\Omega} v_x N \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 y dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right] \cos \varphi d\varphi$$

$$= 2 \pi R dx \cdot \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \frac{dN}{dx} \cdot R.$$

Für den Zustand:  $R/\lambda \geq 0$  und  $\frac{L}{\lambda} \rightarrow 0$ , können wir  $e^{-\frac{L}{\lambda}}$  in Reihe nach  $L/\lambda$  entwickeln.

Wir finden hieraus, da  $L = r_1/\sin y$  und  $r_1 = 2R \cos \varphi$ , wenn wir nur die erste Annäherung in  $R/\lambda$  verwenden und wenn die zusätzliche Geschwindigkeit  $v_x$  unabhängig von  $\bar{\Omega}$  ist:

$$dS' \int dM'_1 = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx} \left[ 1 - 4 \cdot \frac{R}{\lambda} \right] dS',$$

$$dS' \int dM'_{2,1} = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx} \cdot \frac{2R}{\lambda} dS',$$

und

$$dS' \int dM'_{2,2} = \frac{1}{4} Nm \bar{\Omega} \cdot v_{x \rightarrow 0} \cdot \frac{2R}{\lambda} dS',$$

woraus:

$$\frac{1}{4} Nm \bar{\Omega} \cdot v_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx},$$

und also:

$$v_{x \rightarrow 0} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{\Omega}} \cdot \frac{dN}{N dx}.$$

Da das MAXWELL'sche Verteilungsgesetz jedenfalls für die Moleküle, welche von gegenseitigen Zusammenstößen im Inneren des Rohres kommen, gelten muss, erhalten wir:

$$v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} \bar{\Omega} R \frac{dN}{N dx}.$$

Wenn wir auf analoge Weise den Wert für  $dq$  für  $R/\lambda \geq 0$ ,  $dq_{\rightarrow 0}$ , bestimmen wollten, erhellt sofort, dass auf diese Weise keine Lösung gewonnen werden kann, weil der Ausdruck für  $dq_{\rightarrow 0}$  durch Reihenentwicklung von  $e^{-\frac{L}{\lambda}}$  nach  $R/\lambda$  selbst in erster Annäherung keinen endlichen Wert für  $dq_{\rightarrow 0}$  ergibt; nur für das Glied,  $dq'_{2,2 \rightarrow 0}$ , das von  $v_x$  herrührt, erhält man auf diese Weise in erster Annäherung eine endliche Lösung.

Für  $dq'_{2,2 \rightarrow 0}$  findet man hierdurch für ein kreisförmiges, zylindrisches Rohr, wenn  $\frac{R}{\lambda} \geq 0$ :

$$dq'_{2,2 \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi} \cdot v_{x \rightarrow 0} \cdot NdS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot r_1 \, d\varphi,$$

$$q'_{2,2 \rightarrow 0} = \frac{1}{4} N v_{x \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{\lambda} \int dS \int r_1 \, d\varphi = \frac{1}{4} \frac{N v_{x \rightarrow 0}}{\lambda} \cdot \frac{16}{3} \pi R^3,$$

oder:

$$q'_{2,2 \rightarrow 0} = \frac{4}{3} N v_{x \rightarrow 0} \cdot \frac{R}{\lambda} \cdot \pi R^2,$$

worin:

$$v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi R \bar{\Omega}}{4} \frac{dN}{N dx}.$$

Diese Formel für  $q'_{2,2 \rightarrow 0} = \frac{1}{m} \cdot G'_{2,p \rightarrow 0}$  ist der besseren Übersicht wegen bereits in § 3, Seite 31, erwähnt und besprochen worden.

Bevor wir auf die Bestimmung von  $q_{2 \rightarrow 0}$  näher eingehen, wollen wir erst überlegen, welcher Zustand eintritt, wenn eine hydrodynamische, laminare Strömung in der Richtung der Achse hinzukommt.

Es ist einleuchtend, dass eine hinzukommende, laminare Strömung des Gases mit einer konstanten Massengeschwindigkeit in der Richtung der Achse keine Änderung in dem Bestehen und in der Berechnung der Diffusionsströmung,  $d(q'_1 + q'_{2,1})$ , und der Gleitungsströmung,  $dq'_{2,2}$ , verursachen wird, da diese Strömungen einander überlagern und einander nicht beeinflussen.

Zu dem Ausdruck für  $dq$  — die totale gaskinetische Strömung — wird also nur noch ein Glied,  $dq_3$ , herrührend von dieser hydrodynamischen, laminaren Strömung, hinzukommen; dasselbe wird auch der Fall sein für eine überlagerte, laminare Strömung von POISEUILLE, da diese für jede ringförmige Lamelle als eine hydrodynamische Strömung mit konstanter Massengeschwindigkeit aufgefasst werden kann.

In dem Zustande:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , beträgt also die totale, durchströmende Anzahl:

$$dq = dq'_1 + dq'_{2,1} + dq'_{2,2} + dq_3$$

$$= dq_1 + dq_2 + dq_3,$$

wo:

$$q_3 = \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} \cdot q_{1,0} \cdot \dots$$

Ausserdem muss für diesen Zustand:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , ein Glied,  $dM_3$ , herrührend von der überlagerten POISEUILLE-Strömung, zu der Formel für die an die Rohrwand übertragene Bewegungsgrösse hinzugefügt werden, so dass diese Formel lautet:

$$2 \pi R dx \int [dM_1 + dM_2 + dM_3] = \pi R^2 \cdot \frac{dp}{dx} dx,$$

weil auch, jedenfalls wenn  $R/L \ll 1$ , für die stationäre POISEUILLE-Strömung die durch den Druckfall,  $\frac{dp}{dx} dx$ , hervorgebrachte Bewegungsgrösse vollständig auf das Wanelement:  $dS' = 2 \pi R dx$ , übergeht. —

Nach der angenäherten Theorie von MAXWELL für die Gleitung wird diese Bewegungsgrösse  $dM_3$  für ein kreisförmiges Rohr:

$$dS' \int dM_3 = \frac{1}{2} \eta \left( \frac{du}{dr} \right)_{r \geq R} \cdot dS',$$

und also, da:

$$\left( \frac{du}{dr} \right)_{r \rightarrow R} = \frac{1}{2} \eta \cdot R \cdot \frac{dp}{dx},$$

$$2 \pi R dx \int dM_3 = \frac{1}{4} R \frac{dp}{dx} \cdot dS' = \frac{1}{4} R \frac{dp}{dx} 2 \pi R dx = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx \cdot \pi R^2.$$

Für:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , erhält man somit:

$$dS' \int [d(M'_1 + M'_{2,1}) + dM'_{2,2}] + dS' \int dM_3 = \pi R^2 \cdot \frac{dp}{dx} dx,$$

oder:

$$dS' \int (dM_1 + dM_2) = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{dp}{dx} dx,$$

wo:

$$dS' = 2 \pi R \cdot dx$$

Bestimmen wir hieraus:  $v_{x \rightarrow \infty}$ , erhält man für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , wenn  $e^{-\frac{L}{\lambda}} = 0$  gesetzt wird:

$$\frac{1}{16} m \bar{\Omega}^2 \lambda \cdot \frac{dN}{dx} + \frac{1}{4} Nm \bar{\Omega} \cdot v_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{12} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx},$$

und demnach, wenn das erste Glied, von der Selbstdiffusion herührend, in dem Gebiet:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , vernachlässigt wird:

$$v_{x \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{8} \bar{\Omega} R \frac{dN}{N dx}.$$

Dieser Ausdruck ist in Übereinstimmung mit dem von KUNDT und WARBURG, bezw. von MAXWELL, eingeführten Ausdruck für die Gleitungsgeschwindigkeit an der Rohrwand.

Da der MAXWELL'sche Ausdruck für  $M_3$  nur eine Annäherung darstellt und jedenfalls zu gross ist, kann man eventuell zur Vergleichung mit den Beobachtungen:  $M_3 \cdot dS' = \alpha' \cdot \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \cdot \pi R^2$ , setzen und erhält dann:

$$v_{x \rightarrow \infty} = (2 - \alpha') \cdot \frac{\pi}{8} \bar{\Omega} R \frac{dN}{N dx}, \quad \text{d.h.} \quad k_{2, \infty} = 2 - \alpha'.$$

Betrachten wir die zweigliedrige Formel (I + II) für die durchströmende Anzahl der Moleküle in dem Zustande:  $R/\lambda \rightarrow 0$ , sehen wir, dass das erste Glied:  $\int dq_1 = \int (dq_1' + dq_{2,1}')$ , die Selbstdiffusionsströmung repräsentiert; für den Grenzfall:  $\lambda \rightarrow \infty$ , bezw.  $R/\lambda = 0$  und  $L/\lambda \rightarrow 0$ , erhält man hieraus den Ausdruck für die KNUDSEN'sche, reine Molekularströmung, bezw. die Molekular-diffusion:

$$q_{1,0} = \frac{1}{8} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} \int dS \int r_1 d\varphi.$$

Für den Grenzfall:  $\lambda \rightarrow 0$ , bezw.  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , ergibt  $\int dq_1$  den Ausdruck:

$$q_{1,\infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \frac{dN}{dx} \int dS = D_{11,\infty} \cdot \frac{dN}{dx} \int dS.$$

Das zweite Glied  $\int dq_2 = \int dq_{2,2}'$  ist der gaskinetische Ausdruck für die Gleitungsströmung; für  $\lambda \rightarrow \infty$ , bezw.  $R/\lambda = 0$  und  $\frac{L}{\lambda} \Rightarrow 0$ , wird  $\int dq_2 = 0$ , während man für  $R/\lambda \rightarrow 0$  erhält:

$$q_{2 \rightarrow 0} = \frac{4}{3} N v_{x \rightarrow 0} \cdot \frac{R}{\lambda} \int dS, \quad \text{wo } v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} R \bar{\Omega} \frac{dN}{N dx}.$$

Für  $\lambda \rightarrow 0$ , bezw.  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$ , erhält man:

$$q_{2 \rightarrow \infty} = v_{x \rightarrow \infty} \cdot N \int dS, \quad \text{wo } v_{x \rightarrow \infty} = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \frac{dN}{N dx}.$$

Die Grenzwerte für  $M_1 = M'_1 + M'_{2,1}$ ,  $M_2 = M'_{2,2}$  und  $M_3$ , für  $\frac{R}{\lambda} = 0$ ,  $R/\lambda \geq 0$  und  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , werden auf analoge Weise aus den entsprechenden Werten abgeleitet. In der folgenden Übersicht sind die verschiedenen Grenzwerte angegeben.

1°,  $\frac{R}{\lambda} = 0:$

$$q_{1,0} = \frac{2}{3} \bar{\Omega} R \cdot \frac{dN}{dx} \cdot \pi R^2 = D_{11,0} \cdot \frac{dN}{dx} \cdot \pi R^2,$$

$$q'_{2,1} = 0, \quad q'_{2,2} = 0 \quad \text{und} \quad q_{3,0} = 0$$

Reine Molekularströmung, bezw. Molekular diffusion.

2°,  $\frac{R}{\lambda} \geq 0: q_{1 \rightarrow 0} = (q'_{1 \rightarrow 0} + q'_{2,1 \rightarrow 0})$ , vorläufig unbestimmt.

$$q_{2 \rightarrow 0} = q'_{2,2 \rightarrow 0} = \frac{4}{3} N v_{x \rightarrow 0} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{R}{\lambda},$$

wo:  $v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} R \bar{\Omega} \frac{dN}{N dx}.$

Gleitungsströmung.

3°,  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty:$

$$q_{1 \rightarrow \infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \frac{dN}{dx} \cdot \pi R^2 = D_{11,\infty} \cdot \frac{dN}{dx} \pi R^2$$

Selbstdiffusions- bzw. Druckdiffusionsströmung.

$$q_{2 \rightarrow \infty} = N \cdot v_{x \rightarrow \infty} \cdot \pi R^2 \dots \dots \dots \text{ Gleitungsströmung.}$$

$$q_3 = \frac{3 \pi}{128} \cdot q_{1,0} \cdot \frac{2R}{\lambda} \dots \dots \dots \text{ POISEUILLE-Strömung.}$$

Die Grenzwerte für die übertragenen Bewegungsgrößen per  $\text{cm}^2$  sind folgende:

$$1^\circ, \frac{R}{\lambda} = 0: M'_{1,0} = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx} = \frac{1}{2} R \frac{dp}{dx} \left. \begin{array}{l} \text{Reine Molekular-} \\ \text{strömung, bzw.} \\ \text{Molekulardiffusion.} \end{array} \right\}$$

$$M'_{2,1} = M'_{2,2} = M_3 = 0$$

$$2^\circ, \frac{R}{\lambda} \cong 0: M'_{1 \rightarrow 0} = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx} \left[ 1 - 4 \frac{R}{\lambda} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Selbstdiffusions-} \\ \text{strömung.} \end{array} \right\}$$

$$M'_{2,1 \rightarrow 0} = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^2 \cdot R \frac{dN}{dx} \cdot \frac{2R}{\lambda},$$

$$M'_{2,2 \rightarrow 0} = \frac{1}{4} Nm \bar{\Omega} v_{x \rightarrow 0} \cdot \frac{2R}{\lambda},$$

$$\text{mit: } v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi R \bar{\Omega}}{4} \frac{dN}{N dx}$$

Gleitungsströmung.

$$M_{3 \rightarrow 0} \cong 0$$

POISEUILLE-  
Strömung.

$$3^\circ, \frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty: M_{1 \rightarrow \infty} = \frac{1}{16} m \bar{\Omega}^2 \lambda \frac{dN}{dx} \dots \left. \begin{array}{l} \text{Selbstdiffusions-} \\ \text{strömung.} \end{array} \right\}$$

$$M_{2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} Nm \bar{\Omega} v_{\rightarrow \infty},$$

$$\text{mit: } v_{\rightarrow \infty} = k_2 \cdot \frac{\pi R \bar{\Omega}}{8} \frac{dN}{N dx}.$$

Gleitungsströmung.

$$M_{3 \rightarrow \infty} = \alpha' \cdot \frac{1}{12} m \bar{\Omega}^2 R \frac{dN}{dx}$$

$$= \alpha' \cdot \frac{1}{4} R \frac{dp}{dx}, \quad \text{wo } \alpha' = 2 - k_{2,\infty}$$

POISEUILLE-  
Strömung.

Der genaue Verlauf von  $q_1$  und  $q_2$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq R/\lambda \leq \infty$ , ist von grossem Interesse, auch in Verbindung mit dem Entstehen, der Grösse und der Lage des beobachteten Minimums in der Nähe von  $R/\lambda = 0,30$ .

Die Ausdrücke für  $q_1$  und  $q_2$ , bezw.

$$dq_1 = \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} \cdot dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{r_1}{\lambda \sin \theta}} \right] d\varphi,$$

und:

$$dq_2 = \frac{1}{2\pi} v_x N dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ 1 - e^{-\frac{r_1}{\lambda \sin \theta}} \right] d\varphi,$$

sind aber — abgesehen von den obengenannten Grenzwerten für  $R/\lambda \geq 0$  und  $R/\lambda \rightarrow \infty$  — in mathematischer Hinsicht nicht einfach, weil  $r_1$  von  $\varphi$  abhängt, während  $v_x$  sich in dem Gebiet:

$$0 \leq R/\lambda \leq \infty, \quad \text{von} \quad v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{N dx} \quad \text{bis} \quad \text{auf} \quad v_{x \rightarrow \infty} = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{N dx} \quad \text{ändert.}$$

Aus der obenstehenden Übersicht erhellt, dass es nicht möglich ist, durch einfache Reihenentwicklung von  $e^{-L/\lambda}$  nach  $L/\lambda$  den Wert für  $q_{1 \rightarrow 0}$  für  $R/\lambda \geq 0$  zu bestimmen. Um eine endliche Lösung für  $q_{1 \rightarrow 0}$  zu erhalten, müssen also die, in den verschiedenen Formeln für die durchströmende Anzahl von Molekülen und für die auf die Rohrwand übertragenen Bewegungsgrößen, vorkommenden Integrale entweder in konvergenten Reihenentwicklungen vorliegen, oder sie müssen durch andere brauchbare, endliche Ausdrücke ersetzt werden. Es wäre z. B. möglich, dass man in erster Annäherung eine brauchbare und übersichtliche Lösung durch Mittelwertbildung von  $e^{-L/\lambda}$ , bezw.  $L/\lambda$ , erhalten könnte; hiervon ausgehend ist es z. B. leicht nachzuweisen, dass der mittlere Wert von  $L = r_1/\sin \theta$  für die durch den Querschnitt,  $\pi R^2$ , strömenden Moleküle,  $q$ , in dem Zustande  $R/\lambda \geq 0$  annäherungsweise:  $L = 2R$ , wird, so dass in diesem Zustande, in erster Annäherung, der Ausdruck:

$$\left[ 1 - e^{-\frac{r_1}{\lambda \sin \theta}} \right] \quad \text{durch:} \quad \left[ 1 - e^{-\frac{2R}{\lambda}} \right] \approx \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}},$$

ersetzt werden kann; diese Annäherung ist bereits in § 3 besprochen und verwendet worden. —

Für eine einwandfreie Erklärung des Entstehens des beobachteten Minimums in der Nähe von  $R/\lambda = 0,3$ , sowie auch für die genaue Bestimmung des Verlaufs von  $q_1$  und  $q_2$  in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , wird es aber nötig sein, die vorkommenden, bestimmten Integrale der Gattung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\theta, \quad \text{wo } \alpha = \frac{r_1}{\lambda},$$

näher zu untersuchen, um zu sehen, ob es möglich ist, diese Integrale in konvergenten Reihen nach  $\alpha$  zu entwickeln.

Bevor wir hierzu übergehen, wollen wir aber erst die Aufmerksamkeit darauf richten, dass in den vorhergehenden Berechnungen keine Rücksicht auf die Änderung von  $\lambda$  mit den Abständen von  $x$  und  $-x$  genommen worden ist; es kann aber durch einfache Berechnungen bewiesen werden, dass der Wert von  $\lambda$ , der in den abgeleiteten Formeln vorkommt, der Wert von  $\lambda$  für  $x = 0$  ist, also derjenige Wert von  $\lambda$ , der zu dem betrachteten Querschnitt,  $x = 0$ , gehört. —

Da POLLARD und PRESENT<sup>1)</sup> bereits den entsprechenden Beweis für  $q_1$  geliefert haben, ist es überflüssig, diesen Beweis hier zu wiederholen; hinzugefügt kann werden, dass es einfach ist, auf analoge Weise diesen Beweis für  $q_2$  und auch für den Ausdruck zur Bestimmung von  $v_x$  zu liefern. —

§ 8. Wir werden nun erst das Integral:  $W(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\theta,$

näher untersuchen; wir sehen, dass die Grenzwerte betragen:

$$W(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \alpha = 0 \quad \text{und} \quad W(\infty) = 0 \quad \text{für } \alpha \geq \infty.$$

1) POLLARD und PRESENT: loc. cit. S. 773, App. III.

Wird in dem Integral:  $W(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\theta$ ,  $z = \frac{\alpha}{\sin \theta}$  gesetzt, erhalten wir:

$$W(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} + \int_{\infty}^{\alpha} e^{-z} \arcsin \frac{\alpha}{z} dz.$$

Für  $\arcsin \frac{\alpha}{z}$  gilt zwischen:  $-1 \leq \frac{\alpha}{z} \leq 1$ , die konvergente Reihe:

$$\arcsin \left( \frac{\alpha}{z} \right) = \frac{\alpha}{z} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha}{z} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{\alpha}{z} \right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left( \frac{\alpha}{z} \right)^7 + \dots$$

und also:

$$W(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} +$$

$$+ \alpha \int_{\infty}^{\alpha} e^{-z} \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha^2}{z^3} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{\alpha^4}{z^5} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left( \frac{\alpha^6}{z^7} \right) + \dots \right\} dz.$$

Wir setzen:

$$L'_n = \alpha^{n-1} \int_{\infty}^{\alpha} e^{-z} \frac{dz}{z^n};$$

also wird:

$$L'_1 = \int_{\infty}^{\alpha} \frac{e^{-z}}{z} dz = Ei(-\alpha) = \ln(\gamma\alpha) - \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha^4}{4!} - \dots,$$

wo  $Ei(-\alpha)$  der Integrallogarithmus ist, während  $\ln \gamma = C = 0,557216$  (Die Euler'sche Konstante)<sup>1)</sup>.

Verwenden wir die Rekursionsformel:

$$L'_n = -\frac{1}{n-1} [e^{-\alpha} + \alpha L'_{n-1}],$$

erhalten wir hierdurch:

<sup>1)</sup> E. JAHNKE and F. EMDE: Tables of functions, New York, 4th Edition, S. 1, 1945.

$$W(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} -$$

$$\begin{aligned} & - \alpha e^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8} + \dots \right] \\ & + \alpha^2 e^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} + \dots \right] \\ & - \alpha^3 e^{-\alpha} \left[ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} + \dots \right] \\ & + \alpha^4 e^{-\alpha} \left[ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} + \dots \right] \\ & - \alpha^5 e^{-\alpha} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} + \dots \right] \\ & + \alpha^6 e^{-\alpha} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \dots \right] \\ & \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ & + \alpha L_1' \left[ 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \alpha^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \alpha^6 + \dots \right] \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= e^{-\alpha} \left[ \frac{\pi}{2} - A\alpha + B\alpha^2 - D\alpha^3 + Q\alpha^4 - R\alpha^5 + \dots \right] \\ &+ \alpha L_1' \left[ 1 + \frac{1}{12} \alpha^2 + \frac{1}{320} \alpha^4 + \frac{1}{16128} \alpha^6 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Werden  $e^{-\alpha}$  und  $Ei(-\alpha)$  in Reihen nach  $\alpha$  entwickelt, erhalten wir, da:

$$e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{120}\alpha^5 + \dots$$

$$W(\alpha) = \frac{\pi}{2} - m_1\alpha + \alpha \ln \alpha + m_2\alpha^2 - m_3\alpha^3 + \frac{1}{12}\alpha^3 \ln \alpha + \\ + m_4\alpha^4 - m_5\alpha^5 + \frac{1}{320}\alpha^5 \ln \alpha + \dots,$$

worin:

$$m_1 = \frac{\pi}{2} + A - C = 1 + \ln 2 - C = 1 + \varepsilon = 1,11594$$

$$m_2 = \frac{\pi}{4} - 1 + A + B = 0$$

$$m_3 = \frac{A}{2} + B + D + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} - \frac{C}{12} = \frac{1}{12} \left( \frac{4}{3} + \varepsilon \right) = 0,120772$$

$$m_4 = \frac{\pi}{48} + \frac{A}{6} + \frac{B}{2} + D + Q - \frac{5}{36} = 0$$

$$m_5 = \frac{\pi}{240} + \frac{A}{24} + \frac{B}{6} + \frac{D}{2} + Q + R - \frac{1}{32} - \frac{C}{320} =$$

$$= \frac{1}{320} \left( \frac{17}{10} + \varepsilon \right) = 0,567478 \cdot 10^{-2} \quad \text{und}$$

$$\varepsilon = \ln 2 - C = 0,693152 - 0,577216 = 0,11594.$$

Die Werte für  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $Q$  und  $R$  sind in der folgenden Weise bestimmt:

Für  $-1 \leq \frac{1}{y} \leq 1$  haben wir die folgende Identität:

$$\arcsin \frac{1}{y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{y^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{y^7} + \dots$$

Wird diese Identität von  $y$  bis  $\infty$  integriert, erhalten wir die folgende Identität:

$$\begin{aligned} \int_y^\infty \left[ \arcsin \frac{1}{y} - \frac{1}{y} \right] dy &= \left[ y \arcsin \frac{1}{y} + \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{1}{y} \right)^2} \right) \right]_y^\infty \\ &= 1 + \ln 2 - y \arcsin \frac{1}{y} - \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \left( \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4} \left( \frac{1}{y} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6} \left( \frac{1}{y} \right)^6 + \dots, \end{aligned}$$

weil für  $y = \infty$ ,  $y \arcsin \frac{1}{y} = 1$ .

Aus dieser Identität erhält man für  $y = 1$  den folgenden Ausdruck:

$$1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8} + \dots = A.$$

Integrieren wir in analoger Weise die vorhergehende Identität noch einmal, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_y^\infty \left[ 1 + \ln 2 - y \arcsin \frac{1}{y} - \ln \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \right] \right] dy &= \\ = \int_y^\infty \left( \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{y^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6} \cdot \frac{1}{y^6} + \dots \right) dy. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir leicht für  $y = 1$  den Ausdruck:

$$\frac{\pi}{4} - \ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5} + \dots = B$$

und in ganz analoger Weise:

$$\frac{7}{12} \ln 2 - \frac{\pi}{12} - \frac{5}{36} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} + \dots = D$$

und:

$$\frac{\pi}{48} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \dots = Q$$

und:

$$\begin{aligned} & \frac{83}{960} \ln 2 - \frac{\pi}{240} - \frac{449}{9600} = \\ & = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} + \dots = R. \end{aligned}$$

Durch diese Werte für  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $Q$  und  $R$  sind die obenerwähnten Werte für  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  und  $m_5$  vollständig bestimmt.

Ausgehend von:

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\theta = \frac{\pi}{2} - m_1 \alpha + \alpha \ln \alpha + m_2 \alpha^2 - m_3 \alpha^3 + \\ &+ \frac{1}{12} \alpha^3 \ln \alpha + m_4 \alpha^4 - m_5 \alpha^5 + \frac{1}{320} \alpha^5 \ln \alpha + \dots, \end{aligned}$$

worin:

$$m_2 = 0 \quad \text{und} \quad m_4 = 0,$$

kann man leicht, entweder durch Differentiation von  $W$  nach  $\alpha$  oder durch Integration von  $\int_0^{\alpha} W d\alpha$ , neue Ausdrücke bilden.

Wir können auf diese Weise die für unsere Zwecke benötigten Ausdrücke ableiten; wir finden z. B.:

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \theta}} e^{\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^\alpha e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\left(\frac{\alpha}{\sin \theta}\right) = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \theta}} e^{\frac{\alpha}{\sin \theta}} \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^\alpha \left[ \frac{\pi}{2} - m_1 \alpha + \alpha \ln \alpha + m_2 \alpha^2 - m_3 \alpha^3 + \frac{1}{12} \alpha^3 \ln \alpha + \dots \right] d\alpha,$$

woraus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \theta}} e^{\frac{\alpha}{\sin \theta}} \sin \theta d\theta = 1 - \frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{1}{2} \right) \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha +$$

$$+ \frac{1}{4} \left( m_3 + \frac{1}{48} \right) \alpha^4 - \frac{1}{48} \alpha^4 \ln \alpha + \frac{1}{6} \left( m_5 + \frac{1}{1920} \right) \alpha^6 - \frac{1}{1920} \alpha^6 \ln \alpha + \dots$$

und in analoger Weise:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \theta}} e^{\frac{\alpha}{\sin \theta}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{\pi}{4} \alpha^2 - \frac{1}{6} \left( m_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \alpha^3 + \frac{1}{6} \alpha^3 \ln \alpha -$$

$$- \frac{1}{20} \left( m_3 + \frac{1}{48} + \frac{1}{60} \right) \alpha^5 + \frac{1}{240} \alpha^5 \ln \alpha + 0 \cdot \alpha^6 -$$

$$- \frac{1}{42} \left[ m_5 + \frac{1}{1920} + \frac{1}{2240} \right] \alpha^7 + \frac{1}{1920 \cdot 7} \alpha^7 \ln \alpha + \dots$$

wo:

$$m_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} + \varepsilon = D''$$

$$m_3 + \frac{1}{48} + \frac{1}{60} = \frac{1}{12} \left[ \frac{107}{60} + \varepsilon \right] = \frac{1}{12} E''$$

$$m_5 + \frac{1}{1920} + \frac{1}{2240} = \frac{1}{320} \left[ 2 + \frac{1}{105} + \varepsilon \right] = H''.$$

Werden die Werte für  $\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \theta}} \sin^3 \theta d\theta$  und  $\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sin \theta}} \sin^4 \theta d\theta$

in derselben Weise berechnet, erhält man u. a.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} [\sin^2 \theta - \sin^4 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{16} \frac{1}{3} \alpha + \frac{\pi}{8} \alpha^2 - \frac{A''}{6} \alpha^3 + \frac{1}{6} \alpha^3 \ln \alpha - \frac{\pi}{48} \alpha^4 + \frac{B''}{120} \alpha^5 -$$

$$- \frac{1}{240} \alpha^5 \ln \alpha + 0 \cdot \alpha^6 + \frac{1}{840} F''' \alpha^7 - \frac{1}{840} K'' \alpha^7 \ln \alpha + \dots$$

wo:

$$A'' = m_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = \varepsilon + \frac{5}{6} = 6 \cdot 0,15821$$

$$B'' = m_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 6 m_3 - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{167}{120} =$$

$$= 120 \cdot 1,20803 \cdot 10^{-2}$$

$$F''' = m_3 + \frac{1}{48} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72} + \frac{1}{84} - 20 m_5 - \frac{1}{96} - \frac{1}{112} =$$

$$= \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{123}{105} \right] = 840 \cdot 0,60981 \cdot 10^{-4}$$

$$K'' = \frac{1}{48} = 840 \cdot 0,248016 \cdot 10^{-4}.$$

§ 9. Wir können nun die in dem vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln bei der weiteren mathematischen Behandlung des früher abgeleiteten Ausdrucks:

$$d(q_1 + q_2) = \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right] d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi} v_x N dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\lambda}} \right] d\varphi,$$

wo  $L \sin \theta = r_1$ , in Anwendung bringen. —

Da es für einen kreisförmigen Querschnitt zweckmässig ist, die von E. KENNARD, bezw. POLLARD und PRESENT, angegebene Transformation für die Integration über den Querschnitt  $\int dS$  anzuwenden, werden wir der Vergleichbarkeit und Übersicht wegen

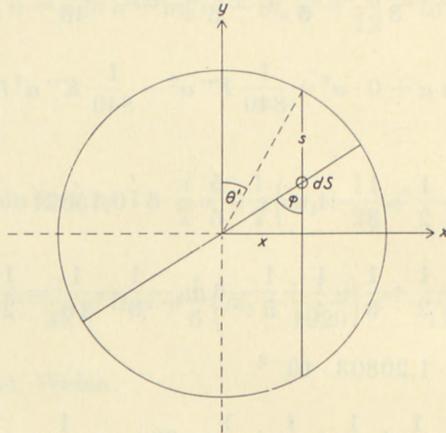


Fig. 13.

unsere Bezeichnungen in Übereinstimmung mit den von POLLARD und PRESENT benutzten Bezeichnungen bringen, indem wir setzen:

$$\theta = \psi, \quad r_1 = s \quad \text{und} \quad R = a.$$

Unter Hinweis auf die Zeichnung, Fig. 13, sehen wir, dass wir für  $dS$  schreiben können:

$$dS = dx \, dy = d(a \sin \theta') \, ds$$

und somit zur Kontrolle:

$$\int dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a \cos \theta' \, d\theta' \int_0^{2a \cos \theta'} ds = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta' \, d\theta' = \pi a^2.$$

Verwenden wir diesen Ausdruck für  $dS$  und betrachten wir  $s$  und  $\theta'$  als polare Koordinaten, erhalten wir nach einer einfachen Umgestaltung:

$$\int dq_1 = \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} \lambda \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a \cos \theta' d\theta' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \sin \psi d\psi \int_0^{2a \cos \theta'} \left[ 1 - e^{-\frac{s}{\lambda \sin \psi}} \right] ds,$$

woraus:

$$\int dq_1 = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2 \cdot \left[ 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{\lambda}{a} \right) + \frac{6}{\pi} \left( \frac{\lambda}{a} \right) \cdot Q \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right) \right],$$

wo:

$$Q \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' d\theta' \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{\cos \theta'}{\sin \psi}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' \cdot f(\theta') d\theta'.$$

In ganz analoger Weise erhalten wir für  $\int dq_2$ :

$$\int dq_2 = \frac{1}{2\pi} N v_x \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a \cos \theta' d\theta' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi \int_0^{2a \cos \theta'} \left[ 1 - e^{-\frac{s}{\lambda \sin \psi}} \right] ds$$

$$= N \cdot v_x \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{a} \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\lambda}{a} \right) \cdot R \left( \frac{a}{\lambda} \right) \right] \cdot \pi a^2, \quad \text{wo:}$$

$$R \left( \frac{a}{\lambda} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' d\theta' \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha}{\lambda} \frac{\cos \theta'}{\sin \psi}} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' \cdot F(\theta') d\theta'.$$

Der Wert von  $v_x$  in dieser Formel für  $q_2$  muss durch die Formeln für die auf die Rohrwand übertragenen Bewegungsgrößen,  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ , bestimmt werden, wenn die Variation von  $v_x$  in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{\alpha}{\lambda} \leq \infty$ , nicht auf andere Weise bekannt ist. —

Verwenden wir nun die in dem vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Reihenentwicklungen für die bestimmten Integralen:

$$f(\theta') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2a}{\lambda} \frac{\cos \theta'}{\sin \psi}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi$$

und

$$F(\theta') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2a}{\lambda} \frac{\cos \theta'}{\sin \psi}} \sin^2 \psi d\psi,$$

worin  $\frac{2a}{\lambda} \cos \theta' = \alpha$  gesetzt wird, erhalten wir nach Integration die Reihenentwicklungen für:

$$Q\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' \cdot f(\theta') d\theta' \quad \text{und} \quad R\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' \cdot F(\theta') d\theta'.$$

Bei diesen Integrationen werden u. a. die folgenden bestimmten Integralen verwendet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta' d\theta' = -\frac{\pi}{2} \ln 2^*), \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta' \ln \cos \theta' d\theta' = \frac{\pi}{8} [1 - 2 \ln 2].$$

\*) Dies Integral ist bekannt und die folgenden Integralen werden mit Hilfe dieses Integrales auf einfache Weise abgeleitet. Eine einfache Ableitung von

dem Integral:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta' d\theta' = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ , ist, wie folgt:  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta' d\theta'$ ; wird

$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha$  gesetzt, erhält man:  $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin \alpha d(-\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \alpha d\alpha = A$ ; ausserdem

ist:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \cdot d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln 2$ , und also:

$$\begin{aligned} 2A + \frac{\pi}{2} \ln 2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2\varphi \cdot d(2\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin \beta d\beta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \beta d\beta = A, \quad \text{woraus: } 2A + \frac{\pi}{2} \ln 2 = A \end{aligned}$$

oder:  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta' d\theta' = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta' \ln \cos \theta' d\theta' = \frac{7}{64} \pi - \frac{3\pi}{16} \ln 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta' \ln \cos \theta' d\theta' = \frac{37}{384} \pi - \frac{15\pi}{96} \ln 2$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \theta' \ln \cos \theta' d\theta' = \frac{533}{6144} \pi - \frac{35\pi}{256} \ln 2.$$

Wir erhalten hieraus:  $G_1 = m \int dq_1 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} a^3 \frac{dN}{dx} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( A'' - \frac{7}{12} \right) \left( \frac{a}{\lambda} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{a}{\lambda} \right) \ln \left( \frac{a}{\lambda} \right) - \frac{8}{15} \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \left[ B'' - \frac{37}{120} \right] \left( \frac{a}{\lambda} \right)^3 - \frac{1}{16} \left( \frac{a}{\lambda} \right)^3 \ln \left( \frac{a}{\lambda} \right) + 0 \cdot \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{840} \left[ \frac{105}{2} F'' - \frac{533}{16} K'' \right] \left( \frac{a}{\lambda} \right)^5 - \frac{1}{840} \cdot \frac{105}{2} K'' \left( \frac{a}{\lambda} \right)^5 \ln \left( \frac{a}{\lambda} \right) + \dots \dots \right] = \\ &= G_1 = G_{1,0} \cdot {}_1P_1 \left( \frac{a}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

wo:

$$\varepsilon = \ln 2 - C = 0,115936; \quad \frac{3}{4} \left( A'' - \frac{7}{12} \right) = \frac{3}{4} \left( \varepsilon + \frac{1}{4} \right),$$

$$\frac{1}{8} \left( B'' - \frac{37}{120} \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{13}{12} \right); \quad \frac{1}{840} \left[ \frac{105}{2} F'' - \frac{533}{16} K'' \right] = \frac{1}{768} \left( \varepsilon + \frac{41}{24} \right)$$

und:

$$\frac{1}{840} \cdot \frac{105}{2} \cdot K'' = \frac{1}{768}.$$

Setzen wir:  $\frac{a}{\lambda} = x_1$  und  $\ln x_1 = 2,30259 \log_{10} x_1$ , erhalten wir:

$$\begin{aligned} {}_1P_1 \left( \frac{a}{\lambda} \right) &= {}_1P_1 = 1 - 0,274452 \cdot x_1 + 1,726943 \cdot x_1 \log_{10} x_1 - \\ &- 0,533333 \cdot x_1^2 + 0,142663 \cdot x_1^3 - 0,143911 \cdot x_1^3 \log_{10} x_1 + \\ &+ 0,00237535 \cdot x_1^5 - 0,00299816 \cdot x_1^5 \log_{10} x_1 + \dots \end{aligned}$$

oder:

$$G_1 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} a^3 \frac{dN}{dx} \cdot {}_1P_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) = G_{1,0} \cdot {}_1P_1 = m \cdot D_{11,0} \cdot \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2 \cdot {}_1P_1.$$

Hieraus ergibt sich also:

$$\begin{aligned} G_1 &= m \int dq_1 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} a^3 \frac{dN}{dx} \cdot {}_1P_1 = \\ &= \frac{1}{3} m \bar{\Omega} \lambda \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2 \cdot \left[ 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda}{a}\right) + \frac{6}{\pi} \left(\frac{\lambda}{a}\right) \cdot Q\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right]. \end{aligned}$$

woraus:

$$Q\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{6} \left(\frac{a}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \cdot {}_1P_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) \cdot -$$

Es ist einleuchtend, dass für  $x_1 = \frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty$  die Funktionen:  $Q\left(\frac{a}{\lambda}\right)$  und  $R\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0$  werden; es stellt sich aber heraus, dass wir in den folgenden numerischen Berechnungen bereits für:  $\frac{a}{\lambda} \geq 4$ ,  $Q\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0$  und  $R\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0$  setzen dürfen.

Wir erhalten nun die folgenden Grenzwerte für  $Q\left(\frac{a}{\lambda}\right)$  und  ${}_1P_1$ , da  $x_1^n \ln x_1 = 0$  für  $x_1 = 0$ , wenn  $n > 0$  ist:

$$\text{Für } x_1 = \frac{a}{\lambda} = 0 : {}_1P_1 = 1 \quad \text{und} \quad Q\left(\frac{a}{\lambda}\right)_0 = \frac{\pi}{16}.$$

$$\text{Für } x_1 = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow \infty : Q\left(\frac{a}{\lambda}\right)_\infty = 0 \quad \text{und also:} \quad {}_1P_1 = \frac{\lambda}{2a} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{\lambda}{a} \right].$$

$$\text{Für } x_1 = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow \infty : G_{1,\infty} = \frac{1}{3} m \bar{\Omega} \lambda \cdot \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2 = D_{11,\infty} \cdot m \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2.$$

$$\text{Für } x_1 = \frac{a}{\lambda} = 0 : G_{1,0} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} a^3 \cdot \frac{dN}{dx} = D_{11,0} \cdot m \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2,$$

und im Allgemeinen:

$$G_{1,\frac{a}{\lambda}} = G_{1,p} = G_{1,0} \cdot {}_1P_1 = m D_{11,0} \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2 \cdot {}_1P_1 = m D_{11,p} \frac{dN}{dx} \cdot \pi a^2,$$

woraus:  $D_{11,p} = D_{11,0} \cdot {}_1P_1 \cdot -$

Mit Hilfe dieser Formel für  $G_{1, \frac{a}{\lambda}}$  können wir also auch die Brauchbarkeit der verwendeten, angenäherten Formel für die Selbstdiffusion, bezw. Druckdiffusion:

$$G_{1, \frac{a}{\lambda}} = G_{1, p} = G_{1, \infty} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2a}} = G_{1, 0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2a}{\lambda}}$$

in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , untersuchen.

Betrachten wir nun den Ausdruck für:  $G_2 = m \int dq_2$ , erhalten wir auf ganz analoge Weise unter Verwendung der Reihenentwicklung für:

$$F(\theta') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2a}{\lambda} \cdot \frac{\cos \theta'}{\sin \psi}} \sin^2 \psi \, d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sin \psi}} \sin^2 \psi \, d\psi,$$

den Ausdruck für  $\int \cos \theta' \cdot F(\theta') \, d\theta'$ , und nach Durchführung der Integration hiervon den folgenden Ausdruck für die Funktion,  $R\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ :

$$R\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{\lambda}\right) \cdot {}_1N_1\left(\frac{a}{\lambda}\right),$$

wo:

$$\begin{aligned} {}_1N_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) = {}_1N_1 &= 1 - \frac{4}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{5}{4}\right) \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot x_1^2 \ln x_1 + 0 \cdot x_1^3 + \\ &+ \frac{1}{24} \left(\varepsilon + \frac{7}{4}\right) \cdot x_1^4 - \frac{1}{24} \cdot x_1^4 \ln x_1 + 0 \cdot x_1^5 + \frac{1}{384} \left(\varepsilon + 1 + \frac{3}{8}\right) \cdot x_1^6 - \\ &- \frac{1}{384} \cdot x_1^6 \ln x_1 + \dots \end{aligned}$$

mit  $x_1 = \left(\frac{a}{\lambda}\right)$ ,  $\varepsilon = 0,115936$  und  $\ln x_1 = 2,30259 \log_{10} x_1$ .

Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned}
 {}_1N_1 = & 1 - \frac{4}{3} \cdot x_1 + 0,682968 \cdot x_1^2 - 1,151293 \cdot x_1^2 \log_{10} x_1 + \\
 & + 0,0534417 \cdot x_1^4 - 0,0959441 \cdot x_1^4 \log_{10} x_1 + \\
 & + 0,00388264 \cdot x_1^6 - 0,00599631 \cdot x_1^6 \log_{10} x_1 \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

und somit die Grenzwerte:

$$\text{Für } x_1 = \frac{a}{\lambda} = 0 : \quad {}_1N_1 = 1, \quad R\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{und}$$

$$\text{für } x_1 = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow \infty : \quad R\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{\rightarrow \infty} = 0, \quad {}_1N_1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2a}.$$

Aus dem Ausdruck für  $\int dq_2$  ergibt sich:

$$m \int dq_2 = G_2 = mNv_x \cdot \pi a^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{a}\right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda}{a}\right) \cdot R\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right]$$

oder nach Einsetzung des Wertes für  $R\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ :

$$G_2 = m \int dq_2 = mN \cdot v_x \cdot \pi a^2 [1 - {}_1N_1].$$

Um den Wert von  $v_x$  aus dem Ausdruck für die übertragenen Bewegungsgrößen zu bestimmen, können wir die bereits hierfür abgeleitete Formel schreiben, wie folgt:

$$\pi a^2 \frac{dp}{dx} = 2\pi a [M_1 + M_2] + M_3.$$

$M_1$  ist durch die Diffusionsströmung und  $M_2$  durch die Gleitungsströmung bestimmt;  $M_3$  rührt von der POISEUILLE-Strömung her.

Unter der Voraussetzung, dass die reine, laminare POISEUILLE-Strömung für  $\frac{a}{\lambda} \geq 0$  noch nicht eingesetzt hat oder jedenfalls nicht von Bedeutung geworden ist, erhalten wir, wenn  $M_3 = 0$  gesetzt wird, den Ausdruck:

$$2\pi a (M_1 + M_2) = \pi a^2 \frac{dp}{dx},$$

oder:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} m \bar{\Omega}^3 \cdot \lambda \frac{dN}{dx} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - e^{-\frac{2a}{\lambda} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin y}} \right] \sin^2 y \cos^2 y \, dy \\ & + \frac{1}{2\pi} m \bar{\Omega} v_{x \rightarrow 0} \cdot N \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - e^{-\frac{2a}{\lambda} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin y}} \right] \sin^2 y \, dy \\ & = \frac{1}{6} m \bar{\Omega}^3 \cdot a \frac{dN}{dx}, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega}^3 \cdot \lambda \frac{dN}{dx} \left[ \frac{\pi}{8} - 2 \cdot Q \left( \frac{a}{\lambda} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} v_{x \rightarrow 0} \cdot N \left[ \frac{\pi}{2} - 2 \cdot R \left( \frac{a}{\lambda} \right) \right] \\ & = \frac{1}{6} \bar{\Omega}^3 \cdot a \frac{dN}{dx}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man:

$$v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} \bar{\Omega} a \cdot \frac{dN}{N dx} \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1},$$

und somit, weil

$$\lim {}_1P_1 = \lim {}_1N_1 = 1 \quad \text{für} \quad \frac{a}{\lambda} = 0:$$

$$v_{x \geq 0} = \frac{\pi}{4} \bar{\Omega} a \cdot \frac{dN}{N dx}, \quad \text{wie früher bereits abgeleitet.}$$

Hieraus folgt, dass für  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ , d. h. solange die laminare, hydrodynamische Strömung von POISEUILLE noch nicht von wesentlicher Bedeutung geworden ist, und also  $M_3 = 0$  gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} G_{2 \rightarrow 0} &= \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} a^3 \frac{dN}{dx} \cdot \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} \\ &= G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1}. \end{aligned}$$

Durch die Reihenentwicklung für  ${}_1N_1$  erhält man hieraus für  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} G_{2 \rightarrow 0} &= G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} = \\ &= G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} \left[ 1 - \frac{3}{8} \left( \varepsilon + \frac{5}{4} \right) \left( \frac{a}{\lambda} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{a}{\lambda} \right) \ln \left( \frac{a}{\lambda} \right) \dots \right], \end{aligned}$$

und somit für  $\frac{a}{\lambda} \cong 0$ :

$$G_{2 \cong 0} = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2a}{\lambda}, \quad \text{weil } \lim \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} = 1 \text{ für } \frac{a}{\lambda} = 0.$$

Wenn, ausgehend von  $a/\lambda \cong 0$ , die hydrodynamische Strömung von POISEUILLE allmählich von grösserer Bedeutung wird, nimmt der Wert von  $v_x$  wegen des Einflusses des Gliedes  $M_3$  ab, so dass die nach dem Ausdruck:

$$G_{2 \rightarrow 0} = G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1},$$

berechneten Werte zu gross werden; wir werden später aus den vergleichenden Tabellen ersehen, dass der Gültigkeitsbereich für diese Formel ist:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \text{ca. } 0,35$ .

Für  $a/\lambda \rightarrow \infty$  folgt der Wert von  $M_3 \rightarrow \infty$  aus der bekannten, laminaren Strömung von POISEUILLE, bezw. aus dem konstanten Wert der inneren Reibung,  $\eta$ , und dem experimentellen Wert von  $k_2$  für  $a/\lambda \rightarrow \infty$ ; wie früher bereits abgeleitet, erhält man hierdurch für:

$$\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty : v_{x \rightarrow \infty} = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} \bar{\Omega} a \cdot \frac{dN}{N dx}, \quad \text{oder}$$

$$\text{mit } k_2 = \frac{4}{3} \quad : v_{x \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{6} \bar{\Omega} a \cdot \frac{dN}{N dx}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$G_{2 \rightarrow \infty} = mN v_{x \rightarrow \infty} \cdot \pi a^2 [1 - {}_1N_{1 \rightarrow \infty}] = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_{1 \rightarrow \infty}]$$

und also:

$$G_{2 \rightarrow \infty} = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \left[ 1 - \frac{\lambda}{2a} \right], \quad \text{wenn für}$$

$$\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty : {}_1N_{1 \rightarrow \infty} = \frac{\lambda}{2a}, \quad \text{eingesetzt wird. —}$$

Wir können hierdurch auch die Brauchbarkeit der früher verwendeten Annäherungsformel für  $G_2$ , d. h. die Formel:

$$G_2 = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \frac{\frac{2a}{\lambda}}{1 + \frac{2a}{\lambda}} = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2a}} \quad \text{in dem Gebiet: } \frac{a}{\lambda} \rightarrow 0,$$

untersuchen.

Wir sehen aber leicht durch Vergleichung der Grenzwerte für  $a/\lambda \geq 0$  und  $a/\lambda \rightarrow \infty$ , dass diese einfache Formel jedenfalls brauchbar ist für das Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \geq 0$ , und für das Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty$ .

§ 10. Eine vollständige Berechnung der Variation von  $v_x$  mit  $a/\lambda$  in dem Gebiet:  $0 \leq a/\lambda \leq \infty$ , mit Hilfe der Formel für die an die Wand übertragenen Bewegungsgrößen ist aber nicht möglich, solange wir nichts näheres über den Verlauf von  $M_3$  in diesem Gebiet wissen.

Nach dem Vorhergehenden können wir also nur feststellen, dass:

$$v_x = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} \bar{\Omega} a \cdot \frac{dN}{Nd\alpha},$$

$$\text{wo für: } \frac{a}{\lambda} \geq 0, \quad k_{2,0} = 2,$$

$$\text{für: } \frac{a}{\lambda} \rightarrow 0, \quad k_2 = 2 \cdot \left( \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} \right)_{\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0}$$

$$\text{und für: } \frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty, \quad k_{2,\infty} = \text{ca. } \frac{4}{3} \quad (\text{exp. festgestellt}).$$

Hieraus erhalten wir also für die zirkularkapillare Durchströmungsmethode:  $\frac{k_{2,0}}{k_{2,\infty}} = \frac{3}{2}$ .

Wie bereits früher erwähnt, würde eine direkte Bestimmung der Gleitung nach der Ablenkungsmethode mit koaxialen Zylindern, von welchen der äusserste Zylinder in sich selbst rotiert, die Möglichkeit einer direkten Bestimmung der Abhängigkeit zwischen  $k_2$  und  $a/\lambda$  eröffnen, weil in diesem Falle keine Selbstdiffusions- bzw. Druckdiffusionsströmung vorhanden sein wird.

Obwohl dies nicht ganz der Fall ist bei der Bestimmung des Gaswiderstands gegen die langsame Bewegung kleiner Kugeln (Gesetz von STOKES), gewährt diese Methode doch wohl eine angenäherte Bestimmung der Variation von  $k_2$  mit  $a/\lambda$ .

Bei der diesbezüglichen experimentellen Untersuchung von MARTIN KNUDSEN und SOPHUS WEBER<sup>1)</sup> stellte sich heraus, dass das Gesetz von STOKES für den Gaswiderstand,  $K$ , in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , wie folgt geschrieben werden kann, wenn  $a$  der Radius der Kugel ist (Vgl. Seite 41):

$$K = 6\pi\eta a \cdot U \left[ 1 + \frac{\zeta}{a} \right]^{-1}, \text{ wo } \zeta = k_2 \cdot \lambda \cdot -$$

Aus den Beobachtungen ergab sich, dass:

$$k_2 = A \left[ 1 + \frac{B}{A} \cdot e^{-C \cdot \frac{a}{\lambda}} \right],$$

wo  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstanten sind, während  $a$  der Radius der Kugel ist.  $U$  ist die konstante Geschwindigkeit der Kugel und  $\lambda$  die mittlere freie Weglänge.

Wird die CHAPMAN'sche Weglänge,  $\lambda$ , verwendet, sind die von KNUDSEN und WEBER gefundenen Werte:

$$A = 1.10, \quad \frac{B}{A} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad C = 1.15.$$

Der Form nach ist diese Formel später von MILLIKAN<sup>2)</sup> und auch von MATTAUCH<sup>3)</sup> bestätigt worden, obwohl die experimentell gefundenen Werte etwas von einander abweichen; es kann aber

1) Loc. cit. Seite 40.

2) und 3) Loc. cit. Seite 40, vgl. auch LIGNAC, loc. cit. S. 27.

wohl kaum ein Zweifel darüber bestehen, dass diese Form der Formel festliegt und brauchbar ist. —

Wir erhalten hieraus für:

$$\frac{a}{\lambda} = 0, \quad k_{2,0} = A + B$$

und für

$$\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty, \quad k_{2,\infty} = A,$$

woraus wir finden:

$$\frac{k_{2,0}}{k_{2,\infty}} = \frac{A+B}{A} = \frac{3}{2},$$

in Übereinstimmung mit den obenerwähnten Resultaten der Durchströmungsmethode.

Wir dürfen also annehmen, dass in dem Ausdruck für die Gleitungsströmung,  $G_2$ ,  $k_2$  in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , auch geschrieben werden kann:

$$k_2 = k_{2,\infty} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-C_2 \cdot \frac{a}{\lambda}} \right).$$

Wir erhalten hieraus für  $G_2$ :

$$\begin{aligned} G_2 &= m \cdot N \cdot k_{2,\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-C_2 \cdot \frac{a}{\lambda}} \right] \bar{\Omega} a \cdot \frac{dN}{Nd x} \cdot \pi a^2 \left[ 1 - {}_1N_1 \left( \frac{a}{\lambda} \right) \right] \\ &= \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} a^3 \frac{dN}{Nd x} \cdot N \cdot \frac{3\pi}{16} \cdot k_{2,\infty} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-C_2 \cdot \frac{a}{\lambda}} \right] [1 - {}_1N_1] \\ &= G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-C_2 \cdot \frac{a}{\lambda}} \right], \quad \text{wenn } k_{2,\infty} = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

woraus:

$$G_{2 \rightarrow 0} = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2a}{\lambda} \left[ 1 - \frac{3}{8} \left( \varepsilon + \frac{5}{4} \right) \left( \frac{a}{\lambda} \right) \cdots \right] \left[ 1 - \frac{1}{3} C_2 \left( \frac{a}{\lambda} \right) \cdots \right]$$

und

$$G_{2 \rightarrow \infty} = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] = G_{1,0} \cdot \frac{\pi}{4} \left[ 1 - \frac{\lambda}{2a} \right].$$

Der Wert für  $C_2$  kann am besten durch die theoretisch berechneten Werte von  $G_2/G_{1,0}$  für  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ , bzw. die Werte aus der Formel:  $G_2/G_{1,0} = \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1}$ , wenn  $\frac{a}{\lambda} < \text{ca. } 0,35$ , bestimmt werden. —

Es stellt sich, wie aus der folgenden Tabelle VII erhellt, heraus, dass  $C_2 = 2$  ein angemessener Wert ist. —

§ 11. Für die Vergleichung der KNUDSEN'schen Beobachtungsreihen mit den Resultaten der entwickelten Theorie ist es zweckmässig, aus den abgeleiteten Formeln erst die benötigten Tabellen für  ${}_1P_1$  und  ${}_1N_1$  zu berechnen. —

In Kolonne I der folgenden Tabelle No. VI ist der Wert von  $a/\lambda$  angegeben.  $\lambda$  ist die freie mittlere Weglänge, so wie diese aus der Formel von S. CHAPMAN berechnet wird; in Kolonne II sind die nach der gefundenen Reihenentwicklung berechneten Werte für  ${}_1P_1$  angegeben. Für  $a/\lambda \geq 4$  ist hierbei die Annäherung:  $Q\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0$ , woraus:  ${}_1P_1 = \frac{\lambda}{2a} \left[1 - \frac{3\lambda}{8a}\right]$ , verwendet.

In Kolonne III sind zur Kontrolle die Werte, welche für  ${}_1P_1$  aus den von P. und P. angegebenen Werten für das Integral,  $K$ , berechnet werden können, angegeben. P. und P.<sup>1)</sup> haben nämlich für  $Q\left(\frac{a}{\lambda}\right)$  den folgenden Ausdruck abgeleitet:

$$Q\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{2} \cdot K, \text{ wo:}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ H_1\left(i \frac{2a}{\lambda \sin \psi}\right) - i I_1\left(i \frac{2a}{\lambda \sin \psi}\right) \right] \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi,$$

woraus folgt:

$${}_1P_1 = \frac{\lambda}{2a} \left[1 - 3\left(\frac{\lambda}{a}\right) \cdot K\right].$$

In diesem Ausdruck für  $K$  bezeichnen  $H_1(iy)$  und  $I_1(iy)$

1) W. G. POLLARD und R. D. PRESENT: loc. cit. S. 774, App. IV.

Tabelle VI.

I	II	III	IV	V
$\frac{a}{\lambda}$	${}_1P_1$ , ber. $= \frac{G_1}{G_{1,0}}$ , ber.	${}_1P_1$ , ber. laut numerischer Integration ( $P \& P$ )	$\frac{1}{1 + 2 \frac{a}{\lambda}}$	${}_1N_1$ , ber.
0.000	1.00000		1.0000	1.00000
.001	0.99454		0.9980	0.99867
.010	.96266		.9804	.98697
.015	.94852		.9709	.98063
.025	.92365		.9524	.96825
.035	.90175		.9346	.95622
.050	.8726		.9091	.9388
.10	.7948		.8333	.8850
.15	.7343		.7692	.8368
.20	.6843		.7143	.7930
.25	.6417	0.6560	.6667	.7531
.30	.6047		.6250	.7165
.35	.5700		.5882	.6828
.40	.5429		.5556	.6516
.50	.4929	0.4946	.5000	.5960
.60	.4515		.4545	.5479
.70	.4163		.4167	.5057
.80	.3863		.3846	.4687
.90	.3602		.3571	.4360
1.0	.3373	0.3401	.3333	.4070
2.0	.1994	0.2055	.2000	.2300
3.0	.1461		.1429	.1647
4.0	.1133		.1111	.1250
5.0	.0925		.0909	.1000
10.—	.0481		.0476	.0500
20.—	.02453		.02439	.0250
50.—	.00993		.00990	.0100
100.—	.00498		.00498	.0050
200.—	.00250		.00249	.0025
400.—	.001249		.001248	.00125
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$\infty$	0.0000		0.0000	0.00000

Für  $\frac{a}{\lambda} \geq 4$  :  ${}_1P_1 \rightarrow \infty = \frac{\lambda}{2a} \left[ 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda}{a} \right]$  und  ${}_1N_1 \rightarrow \infty = \frac{\lambda}{2a}$ ,

also:  $\left( \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} \right)_{\rightarrow \infty} = \left[ 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda}{a} \right]_{\rightarrow \infty} \geq 1$ .

die STRUVE'sche, bezw. die BESSEL'sche Zylinderfunktion, 1<sup>ster</sup> Ordnung mit komplexem Argument:  $iy = i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin \psi}$ .

Durch numerische Integration von dem Ausdruck für  $K$  haben P. und P. gefunden:

$$x_1 = \frac{a}{\lambda} = 0,25: K = 0,0560, \text{ woraus: } {}_1P_1 = 0,6560$$

$$x_1 = \frac{a}{\lambda} = 0,50: K = 0,0834, \text{ woraus: } {}_1P_1 = 0,4996$$

$$x_1 = \frac{a}{\lambda} = 1,00: K = 0,1066, \text{ woraus: } {}_1P_1 = 0,3401$$

$$x_1 = \frac{a}{\lambda} = 2,00: K = 0,1186, \text{ woraus: } {}_1P_1 = 0,2055$$

$$x_1 = \frac{a}{\lambda} = \infty : K = 0,1250, \text{ woraus: } {}_1P_1 = 0,0000.$$

Wir ersehen hieraus, dass unsere theoretischen Zahlenwerte für  ${}_1P_1$ , in hinreichender Übereinstimmung sind mit den Werten, die aus den numerisch berechneten  $K$ -Werten von P. und P. abgeleitet werden können.

In Kolonne IV sind zur Vergleichung die Werte von  $\frac{1}{1 + \frac{2a}{\lambda}}$  angegeben; hieraus erhellt, dass der Unterschied zwischen  $\frac{1}{\left(1 + \frac{2a}{\lambda}\right)}$  und  ${}_1P_1$  für  $a/\lambda > 0,5$  vernachlässigt werden kann; in dem Gebiet:  $0 \leq a/\lambda \leq 0,5$ , beträgt der maximale Unterschied ca. 4%, so dass die Diffusionsformel:  $\frac{1}{D_{11,p}} = \frac{1}{D_{11,0}} + \frac{1}{D_{11,\infty}}$ , jedenfalls für kreisförmige, zylindrische Rohre, als erste Annäherung brauchbar ist. —

In Kolonne V sind die in analoger Weise berechneten Werte von  ${}_1N_1$  nach der gefundenen Reihenentwicklung angegeben; für  $a/\lambda \geq 4$  ist bei der Berechnung die Annäherung:  $R\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0$ , ver-

wendet; hieraus folgt für das Gebiet, worin  $\frac{a}{\lambda} \geq 4$  ist, dass

$${}_1N_1 = \frac{\lambda}{2a}.$$

Wir werden nun die Zahlen in der Tabelle No. VII näher betrachten; in Kolonne 1 dieser Tabelle sind wieder die Werte von  $a/\lambda$  angegeben; in Kolonne 2 stehen die mittleren Werte von  $G = \Phi\left(\frac{a}{\lambda}\right) = G_{1,2,3}/G_{1,0}$ , wie diese von Dr. MELKONIAN aus dem vollständigen Beobachtungsmaterial von MARTIN KNUDSEN abgeleitet sind.

Wenn wir mit den früheren Ausdrücken:

$$\frac{{}_1\varrho \cdot Q_t}{(p_1 - p_2)} = {}_1\varrho \cdot T_1 \quad \text{und} \quad {}_1\varrho \cdot T_{1,0} = G_{1,0},$$

vergleichen, sehen wir leicht, dass:

$$\frac{G_{1,2,3}}{G_{1,0}} = \frac{G_1}{G_{1,0}} + \frac{G_2}{G_{1,0}} + \frac{G_3}{G_{1,0}} = \frac{1}{G_{1,0}} \cdot \frac{{}_1\varrho \cdot Q_t}{p_1 - p_2} = \frac{T_1}{T_{1,0}},$$

wo:

$$\frac{G_1}{G_{1,0}} = {}_1P_1 \quad \text{und} \quad \frac{G_2}{G_{1,0}} = \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2a}{\lambda}} \right],$$

(Formel I, Tabelle VII, Kolonne 9, die gültig ist in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ ), bzw.  $\frac{G_2}{G_{1,0}} = \frac{3\pi}{8} \cdot [1 - {}_1N_1] \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1}$  (Formel II, Tabelle VII, Kolonne 8, die theoretisch abgeleitet ist, aber nur gültig für das Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ ) und  $G_3/G_{1,0} = \frac{3\pi}{64} \left(\frac{a}{\lambda}\right)$  (Kolonne 4).

Dieser letzte Ausdruck,  $G_3/G_{1,0}$ , stellt die rein hydrodynamische, laminare Strömung von POISEUILLE dar.

In Kolonne 3 stehen die Werte von:  $G_{1,2,3}/G_{1,0}$ , welche aus der Beobachtungsreihe von MARTIN KNUDSEN mit reiner Kohlensäure und Rohr Nr. 4 hervorgegangen sind. MARTIN KNUDSEN gibt, wie bekannt, selber an, dass diese Messungen mit dem Rohr Nr. 4 (Bündel aus 24 parallel geschalteten Rohren mit  $a = 0,003260$  cm

Tabelle

1	2	3		4	5	
	$G_{1,2,3}/G_{1,0}$	$G_{1,2,3}/G_{1,0}$		$G_3/G_{1,0}$	$(G_1 + G_2)/G_{1,0}$ , beob.	
$\frac{\alpha}{\lambda}$	Dr. Melkonian's Mittelwerte für CO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> und O <sub>2</sub>	a) Rohrenbündel No. 4 b) Rohr No. 3 CO <sub>2</sub>		$= \frac{3\pi}{64} \left( \frac{\alpha}{\lambda} \right)$	$= (G_{1,2,3} - G_3)/G_{1,0}$ (Kol. 3 — Kol. 4.)	
				(Poiseuille)		
0·000	1·000	1·0000		0·0000	1·0000	
·001	0·987	0·9950		0·0001 <sup>5</sup>	0·9949	
·010	0·981	0·9800		0·0015	0·9785	
·015	0·969	0·9730		0·0022	0·9708	
·025	0·958	0·9620		0·0037	0·9583	
·035	0·952	0·9560		0·0052	0·9508	
·05	0·948	0·9510		0·0074	0·9436	
·10	0·927	0·9390		0·0147	0·9243	
·15	0·925	0·9335		0·0221	0·9114	
·20	0·923	0·9300		0·0295	0·9015	
·25	0·921	0·9285		0·0368	0·8917	
·30	0·920	Min.	0·9270	0·0442	0·8828	
·35	0·921		0·9280	0·0515	0·8765	
·40	0·923		0·9295	0·0589	0·8706	
·50	0·927		0·9360	0·0736	0·8624	
		a)	b)		a)	b)
·60	0·933	0·9440	0·9492	0·0884	0·8556	0·8608
·70	0·939	0·9540	0·9566	0·1031	·8509	·8535
·80	0·948	0·9645	0·9651	0·1178	·8467	·8473
·90	0·955	0·9760	0·9749	0·1325	·8435	·8424
1·00	0·963	0·9882	0·9855	0·1473	·8409	·8382
1·50	1·017	1·0535	1·0464	0·2209	·8326	·8255
2·00	1·076	1·1220	1·1102	0·2945	·8275	·8157
3·00	1·208	1·2645	1·2485	0·4418	·8227	·8067
4·00	1·355	1·4095	1·3909	0·5890	·8205	·8019
5·0	1·494	1·5550	1·5350	0·7361	·8189	·7989
6·0	—	1·7010	—	0·8836	·8174	—
7·0	1·770	1·8475	—	1·0308	·8167	—
8·0	—	1·9945	—	1·1781	·8164	—
9·0	—	2·1413	—	1·3254	·8159	—
10—	2·16	2·2880	2·2652	1·4726	·8154	·7926
20—	3·66	3·7593	3·7345	2·9452	·8141	·7893
50—	8·01	8·1760	8·1504	7·3631	·8130	·7873
100—	15·60	15·539	15·514	14·726	·8125	·7866
200—	30·90	30·264	30·239	29·452	·8116	·7863
400—	59·85	59·716	59·691	58·905	·8110	·7860
∞	∞	∞	∞	∞	0.810	0.785

VII.

6	7	8	9	10
$(G_1 + G_2)/G_{1,0}$ , ber.	$G_1/G_{1,0}$ , ber.	$G_2/G_{1,0}$ , ber. =	$G_2/G_{1,0}$ , ber. =	$\frac{2\alpha}{\lambda}$
(Kolonne 7 + Kolonne 9)	= ${}_1P_1$	$\frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1}$	$\frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} \right]$	$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\alpha}{1 + \frac{2\alpha}{\lambda}}$
1·0000	1·00000	0·00000	0·00000	0·00000
0·9961	0·99454	·00156	·00157	·00157
·9779	·96266	·01498	·01525	·01540
·9711	·94852	·02208	·02259	·02288
·9605	·92365	·03569	·03680	·03740
·9522	·90175	·04863	·05040	·05138
·9424	·8726	·06703	·06980	·07140
·9221	·7948	·1217	·12730	·1309
·9101	·7343	·1687	·1758	·1812
·9014	·6843	·2104	·2171	·2244
·8944	·6417	·2478	·2527	·2618
·8885	·6047	·2819	·2838	·2945
·8810	·5700	·3120	·3110	·3234
·8780	·5429	·3420	·3351	·3490
·8686	·4929	(·3937)	·3757	·3927
·8601	·4515	(·4389)	·4086	·4284
·8527	·4163	(·4793)	·4364	·4582
·8457	·3863	—	·4594	·4833
·8398	·3602	—	·4797	·5048
·8345	·3373	—	·4972	·5236
·8179	·2510	—	·5669	·5891
·8097	·1994	—	·6103	·6283
·8030	·1461	—	·6569	·6734
·8006	·1133	—	·6873	·6981
·7994	·0925	—	·7069	·7140
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
·7942	0·0481	—	·7461	·7480
·7904	0·0245	—	·7658	·7662
·7875	0·0099	—	·7776	·7735
·7865	0·0050	—	·7815	·7834
·7860	0·0025	—	·7834	·7822
·7860	0·00125	—	·7848	·7853
0·7854	0.0000	$\left(\frac{3\pi}{8} = 1·1781\right)$	$\frac{\pi}{4} = 0·7854$	$\frac{\pi}{4} = 0.7854$

und Länge des Bündels:  $L = \text{ca. } 2 \text{ cm}$ ) die bestmöglichen seiner Beobachtungsreihen darstellen.<sup>1)</sup>

Die bei den verschiedenen Mittelldrucken:  $\bar{p} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ , beobachteten  $T_1$ -Werte in dem Bereich:  $0,5 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , sind unter Verwendung der Interpolationsformel:

$$T_1 = a_1 \bar{p} + b_1 \frac{1}{1 + c_2 \cdot \bar{p}} + b_1 \frac{c_1 \bar{p}}{1 + c_2 \cdot \bar{p}}, \text{ bzw.}$$

$$\frac{T_1}{b_1} = \frac{G_{1,2,3}}{G_{1,0}} = \frac{a_1}{b_1} \bar{p} + \frac{1}{1 + c_2 \cdot \bar{p}} + \frac{c_1 \bar{p}}{1 + c_2 \cdot \bar{p}},$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgewertet; hierdurch sind die Konstanten dieser Formel bestimmt, und mit Hilfe dieser Konstanten sind die in der Kolonne 3 *a* angegebenen Werte berechnet. —

In derselben Weise ist das Beobachtungsmaterial von MARTIN KNUDSEN mit dem Rohr Nr. 3 ( $a = 0,01415 \text{ cm}$  und  $L = \text{ca. } 12 \text{ cm}$ ) und reiner Kohlensäure behandelt; auch für diese Beobachtungsreihe ist das beobachtete Material für  $\frac{a}{\lambda} > 0,5$  nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt und ausgewertet. Mit den hierdurch erhaltenen Konstanten sind die in der Kolonne 3 *b* angegebenen Werte für  $G_{1,2,3}/G_{1,0}$  von dieser Messreihe bestimmt.

Für das Gebiet  $a/\lambda > 0,5$  ergeben diese zwei Beobachtungsreihen einen Unterschied im Grenzwert für  $a/\lambda \rightarrow \infty$ , bzw. für die Konstante:  $c_1/c_2$ , die bei grossen Werten von  $a/\lambda$  für die Gleitung massgebend ist, da wir aus der Interpolationsformel für:  $a/\lambda \rightarrow \infty$ , erhalten:

$$\frac{T_1}{b_1} = \frac{G_{1,2,3}}{G_{1,0}} = \frac{a_1}{b_1} \bar{p} + \frac{c_1}{c_2}.$$

Für das Rohrbündel Nr. 4 ergab sich  $c_1/c_2 = 0,810$  (Kolonne 5 *a*), während für das Rohr Nr. 3, wie auch für das Rohr Nr. 1,  $c_1/c_2 = 0,785$  gefunden wurde (Kolonne 5 *b*). Dieser letzte Wert ist auch in Übereinstimmung mit dem Wert, der annäherungsweise aus den Mittelwerten von Dr. MELKONIAN für das ganze Beobachtungsmaterial abgeleitet werden kann. Dieser Wert  $c_1/c_2 =$

1) MARTIN KNUDSEN: loc. cit. S. 118, 1909.

0,785 ist in Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert:  $c_1/c_2 = \frac{\pi}{4} = 0,7854$ , welcher sich ergab, wenn  $k_2 = \text{ca. } \frac{4}{3}$ , in Übereinstimmung mit dem Mittelwert der Beobachtungen, gesetzt wurde.

In dem Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \text{ca. } 0,6$ , sind die KNUDSEN'schen Beobachtungen für Kohlensäure mit den Rohren Nr. 4 und No. 3 graphisch ausgeglichen, weil keine angemessene Interpolationsformel in diesem Gebiet vorliegt. Die Übereinstimmung der Beobachtungen mit Rohr No. 4 und Rohr No. 3 ist in diesem Gebiet sehr befriedigend; die in der Kolonne 3 angegebenen Werte von  $G_{1,2,3}/G_{1,0}$  für das Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq 0,5$ , sind durch graphische Ausgleichung bestimmt. Leider waren in diesen Versuchen, wie bekannt, die anwesenden Quecksilberdämpfe nicht durch Ausfrieren entfernt.

Die Übereinstimmung zwischen den Mittelwerten der Kolonne 2 (Dr. MELKONIAN) und den Zahlen in Kolonne 3 ist auch befriedigend, wenn die Messgenauigkeit in Betracht gezogen wird. —

Es erhellt auch aus diesen Tabellen, dass das beobachtete Minimum bei:  $\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{\text{min.}} = \text{ca. } 0,31$ , liegt, während  $G_{1,2,3} (\text{Min.}) = 0,925 \cdot G_{1,0}$ , wie schon früher erwähnt.

In der Kolonne 4 sind die berechneten Werte für  $G_3/G_{1,0} = \frac{3\pi}{64} \cdot \left(\frac{a}{\lambda}\right)$  angegeben, d. h. die Werte für die hydrodynamische, laminare Strömung von POISEUILLE. Für diese Strömung haben wir als erste Annäherung angenommen, dass der Ausdruck  $G_3/G_{1,0} = \frac{3\pi}{64} \cdot \left(\frac{a}{\lambda}\right)$ , der jedenfalls richtig ist für grössere Werte von  $a/\lambda$ , auch annähernd brauchbar bleibt in dem Gebiet  $a/\lambda \rightarrow 0$ . Aus den Werten in Kolonne 4 erhellt, dass der Einfluss des Gliedes  $G_3/G_{1,0}$  auf  $G_{1,2,3}/G_{1,0}$  in dem Gebiet  $a/\lambda \rightarrow 0$  jedenfalls sehr klein wird; erst bei etwas grösseren Werten von  $a/\lambda$ , d. h.  $a/\lambda \geq 0,1$  à  $0,2$ , wird der Einfluss des Gliedes  $G_3/G_{1,0}$  von messbarer Bedeutung; bei dem Wert:  $a/\lambda = 0,3$ , beträgt der Einfluss ca. 5% und bei:  $a/\lambda = 0,6$ , ca. 10%.

In Kolonne 5 sind die Werte von:

$$\left(\frac{G_1 + G_2}{G_{1,0}}\right)_{\text{beob.}} = (G_{1,2,3}/G_{1,0})_{\text{beob.}} - (G_3/G_{1,0})_{\text{ber.}},$$

angegeben, d. h. die Differenzen zwischen den Werten in den Kolonnen 3 und 4.

Wir ersehen hieraus, dass dieser »beobachtete« Wert von  $(G_1 + G_2)/G_{1,0}$  gleichmässig von 1 (für  $\frac{a}{\lambda} = 0$ ) bis auf 0,785 (0,810) für  $\left(\frac{a}{\lambda}\right) \rightarrow \infty$  abnimmt.

Es erhellt also hieraus, dass der Wert von:  $\left(\frac{G_1 + G_2}{G_{1,0}}\right)_{\text{beob.}}$  mit wachsendem Wert von  $\frac{a}{\lambda}$ , d. h. mit wachsendem Wert von  $\bar{p}$ , gleichmässig *abnimmt*, so dass die natürliche Erklärung für das Entstehen des beobachteten Minimums bei  $a/\lambda = 0,31$  gesucht werden muss in dem Eintreten der hydrodynamischen, laminaren Strömung von POISEUILLE,  $G_3/G_{1,0}$ , die mit wachsendem Wert von  $\frac{a}{\lambda}$ , bzw.  $\bar{p}$ , *zunimmt*, und also *nicht* in der gaskinetischen Wechselwirkung der Moleküle, bzw. in der Summe der gaskinetischen Ausdrücke für  $G_1/G_{1,0}$  (herrührend von der Selbstdiffusion, bzw. Druckdiffusion) und  $G_2/G_{1,0}$  (das Gleitungsmitglied). (Vgl. Kurve I + II, Fig. 14).

In der Kolonne 6 steht die Summe der Zahlen der Kolonne 7 (das berechnete Diffusionsglied:  $G_1/G_{1,0} = {}_1P_1$ ) und der Kolonne 9, d. h. das berechnete Gleitungsmitglied:

$$\frac{G_2}{G_{1,0}} = \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2a}{\lambda}} \right].$$

Die Summe dieser beiden theoretischen Glieder (Kolonne 6) stellt also den theoretisch berechneten Wert von  $\left(\frac{G_1 + G_2}{G_{1,0}}\right)_{\text{ber.}}$  dar und muss somit, *wenn die Theorie brauchbar ist*, mit den observierten Zahlen in Kolonne 5, bzw. 5 b, übereinstimmen. Durch Vergleichung erhellt, dass dies in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , der Fall ist; die grössten Abweichungen betragen nur ca.  $\frac{3}{4} \%$ , aber im Mittel weniger. —

In der Kolonne 7 stehen die theoretischen Werte von  $G_1/G_{1,0} =$

=  ${}_1P_1$ , d. h. die berechnete Selbstdiffusionsströmung, bezw. die Druckdiffusionsströmung des reinen Gases. Es kann angenommen werden, dass die theoretischen Werte von  $G_1/G_{1,0} = {}_1P_1$  für grössere Werte von  $a/\lambda$  (bezw. im MAXWELL'schen Zustand der Gase) zu klein sind, weil unsere Formel für  ${}_1P_1$  für  $a/\lambda \rightarrow \infty$ ,  $D_{11,\infty} = \frac{1}{3} \bar{D}\lambda$ , ergibt, während der exakte Ausdruck für den reinen MAXWELL'schen Zustand,  $D_{11,\infty} = 0,60 \cdot \bar{D}\lambda$ , sein muss, jedenfalls wenn die Moleküle als harte, elastische Kugeln aufgefasst werden können. —

Der Einfluss des Gliedes,  $G_1/G_{1,0} = {}_1P_1$ , in der Summe  $\left(\frac{G_1 + G_2}{G_{1,0}}\right)$  ist aber in dem Zustande:  $a/\lambda \rightarrow \infty$ , dem Gleitungsmitglied,  $G_2/G_{1,0}$ , gegenüber so gering, dass es schwierig sein wird, diesen Unterschied experimentell nachzuweisen, jedenfalls solange der theoretische Wert des Gleitungsmitglied in dem Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty$ , nicht einwandfrei theoretisch abgeleitet ist, und solange das Gleitungsmitglied und das Diffusionsglied in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , nicht, unabhängig von einander, mit grösster Genauigkeit experimentell untersucht worden sind.

In der Kolonne 8 stehen die nach der theoretischen Formel:

$$G_2/G_{1,0} = \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1},$$

berechneten Werte des Gleitungsmitglied.

Diese Formel ist aber nur gültig in dem Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ , d. h. solange die POISEUILLE-Strömung noch nicht von Bedeutung geworden ist. Dies erhellt auch daraus, dass diese Formel für:  $G_2/G_{1,0}$ , ber., nicht den richtigen Grenzwert für  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty$  ergibt.

In der Kolonne 9 stehen die Werte des Gleitungsmitglied,  $G_2/G_{1,0}$ , wenn angenommen wird, dass der Wert für  $v_x$  in analoger Weise, wie von MARTIN KNUDSEN und SOPHUS WEBER<sup>1)</sup> in ihrer Untersuchung über den Widerstand gegen die langsame Bewegung kleiner Kugeln (Gesetz von STOKES) gefunden, mit  $a/\lambda$  variiert. —

Die auf diese Weise abgeleitete Formel:

1) Vgl. S. 40.

$\frac{G_2}{G_{1,0}} = \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2a}{\lambda}} \right]$ , ergibt nicht allein die richtigen Werte für:  $\frac{a}{\lambda} = 0$ ,  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$  und  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty$ , sondern es erhellt ausserdem aus den Zahlen in den Kolonnen, 8 und 9, dass die Werte für  $a/\lambda \rightarrow 0$  in befriedigender Übereinstimmung sind mit den berechneten Werten, die sich in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \text{ca. } 0,35$ , aus der theoretischen Formel:  $G_2/G_{1,0} = \frac{3\pi}{8} [1 - {}_1N_1] \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1}$ , erschliessen lassen.

Für grössere Werte von  $\frac{a}{\lambda}$  erhält man aus dieser letzten, theoretischen Formel zu grosse Werte für  $G_2/G_{1,0}$ , weil in dieser Formel der Änderung von  $v_x$  bei grösseren Werten von  $\left(\frac{a}{\lambda}\right)$  wegen der POISEUILLE-Strömung nicht Rechnung getragen ist. Dies erhellt auch daraus, dass der Grenzwert für  $a/\lambda \rightarrow \infty$ :  $\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$ , wird, während dieser Grenzwert  $\frac{\pi}{4}$  betragen muss.

In der Kolonne 10 sind zur Vergleichung die Werte für die Grösse:  $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2a}{\lambda}}{1 + \frac{2a}{\lambda}}$ , welche wir als Annäherung für  $G_2/G_{1,0}$  verwendet haben, angegeben.

Es erhellt durch Vergleichung der Zahlen in der Kolonne 10 mit den richtigen Werten in der Kolonne 8 und Kolonne 9, dass der Ausdruck:  $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2a}{\lambda}}{1 + \frac{2a}{\lambda}}$ , eine brauchbare Annäherung für  $G_2/G_{1,0}$  darstellt.

Der maximale Unterschied beträgt ca. 5 0/0, während die Unterschiede in den Gebieten:  $a/\lambda \rightarrow 0$  und  $a/\lambda \rightarrow \infty$ , nur sehr gering sind. —

Es erhellt aus den vorhergehenden Betrachtungen, dass der von MARTIN KNUDSEN in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , be-

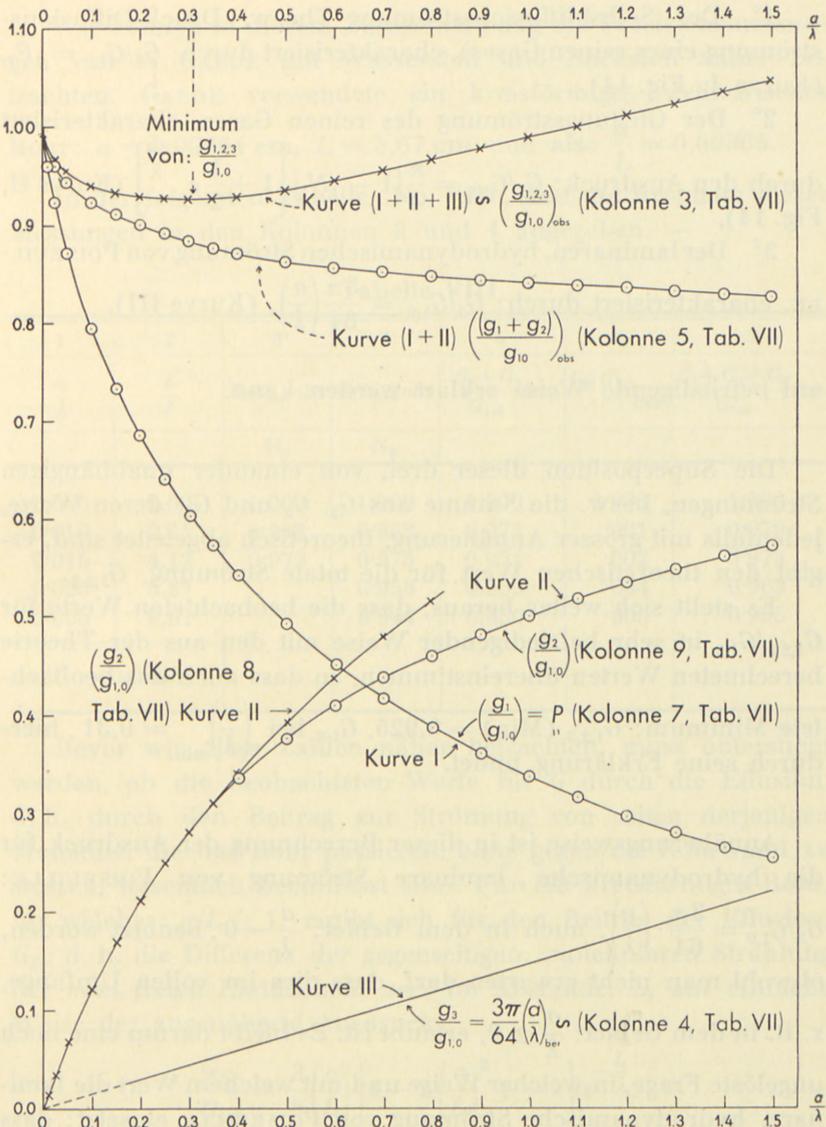


Fig. 14.

obachtete Verlauf der stationären Durchströmung eines reinen Gases durch ein kreisförmiges, zylindrisches Rohr durch die Superposition dreier von einander unabhängiger Strömungen, (vgl. Kurve: I + II + III, in Fig. 14) nämlich:

1° Der Selbstdiffusionsströmung (bezw. Druck-Diffusionsströmung eines reinen Gases), charakterisiert durch:  $G_1/G_{1,0} = {}_1P_1$ , (Kurve I, Fig. 14),

2° Der Gleitungsströmung des reinen Gases, charakterisiert durch den Ausdruck:  $G_2/G_{1,0} = \frac{\pi}{4} [1 - {}_1N_1] \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{2a}{\lambda}} \right]$  (Kurve II, Fig. 14),

3° Der laminaren, hydrodynamischen Strömung von POISEUILLE, charakterisiert durch:  $G_3/G_{1,0} = \frac{3\pi}{64} \left( \frac{a}{\lambda} \right)$ , (Kurve III),

auf befriedigende Weise erklärt werden kann.

Die Superposition dieser drei, von einander unabhängigen Strömungen, bezw. die Summe aus  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$ , deren Werte, jedenfalls mit grosser Annäherung, theoretisch abgeleitet sind, ergibt den theoretischen Wert für die totale Strömung,  $G_{1,2,3}$ .

Es stellt sich weiter heraus, dass die beobachteten Werte für  $G_{1,2,3}/G_{1,0}$  in sehr befriedigender Weise mit den aus der Theorie berechneten Werten übereinstimmen, so dass auch das beobachtete Minimum:  $G_{1,2,3}(\text{Min}) = 0,925 \cdot G_{1,0}$  bei  $\left( \frac{a}{\lambda} \right)_{\text{min}} = 0,31$ , hierdurch seine Erklärung findet.

Annäherungsweise ist in dieser Berechnung der Ausdruck für die hydrodynamische, laminare Strömung von POISEUILLE:  $G_3/G_{1,0} = \frac{3\pi}{64} \cdot \left( \frac{a}{\lambda} \right)$ , auch in dem Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ , benutzt worden, obwohl man nicht erwarten darf, dass dies im vollen Umfange, z. B. in dem Gebiet:  $\frac{a}{\lambda} \cong 0$ , erlaubt ist. Es bleibt darum eine noch ungelöste Frage, in welcher Weise und mit welchem Wert die laminare, hydrodynamische Strömung von POISEUILLE einsetzt; dass diese laminare, hydrodynamische Strömung bereits bei dem Wert:  $\frac{a}{\lambda} = \text{ca. } 0,3$ , im vollen Umfange eingetreten ist, erhellt aber aus der Übereinstimmung zwischen dem theoretischen und beobachteten Minimum für  $G_{1,2,3}$  bei  $\frac{a}{\lambda} = 0,31$ . —

Wir können in diesem Zusammenhang die Präzisionsmessungen von W. GAEDE mit Wasserstoff und Stickstoff näher betrachten. GAEDE verwendete ein kreisförmiges, zylindrisches Rohr:  $a = 0,02064$  cm,  $L = 5,67$  cm und also  $\frac{a}{L} = 0,00365$ .

In der folgenden Tabelle, No. VIII, sind die Resultate dieser Messungen in den Kolonnen 3 und 4 angegeben. —

Tabelle VIII.

1	2	3	4	5	6	7
$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{L}{\lambda}$	$G/G_{1,0}$ obs	$G/G_{1,0}$ obs	$\frac{G_1+G_2}{G_{1,0}}$ ber.	$G_3/G_{1,0}$ ber.	$\frac{G_1+G_2+G_3}{G_{1,0}}$ ber.
		H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>			
0·000	0.00	1·000	1·000	1.000	0·000	1·000
0·010	2.75	0·982	0·983	0.978	·001	0·979
0·015	4.12	0·972	0·975	0.971	·002	0·973
0·025	6.87		0·958	0.959	·004	0·963
0·035	9.61		0·944	0.950	·005	0·955
$a/L = 0,00365$						

Bevor wir diese Zahlen näher betrachten, muss untersucht werden, ob die beobachteten Werte für  $G$  durch die Effusion, d. h. durch den Beitrag zur Strömung von seiten derjenigen Moleküle, die das Rohr passieren, ohne gegen die Rohrwand zu stoßen, wesentlich beeinflusst sind. Für ein kreisförmiges Rohr, für welches:  $a/L \ll 1$ , ergibt sich für den Beitrag der Effusion,  $G_E$ , d. h. die Differenz der gegenseitigen, molekularen Strahlung der zwei freien Endflächen,  $\pi a^2$ , im Abstände,  $L$ , auf einfache Weise der angenäherte Ausdruck:

$$\frac{G_E}{G_{1,0}} = \frac{3}{8} \left(\frac{a}{L}\right) \left[ 1 - 2 \left(\frac{a}{L}\right)^2 + \dots \right] e^{-\frac{L}{\lambda}},$$

wenn  $a/L \ll 1$ . Es geht aus dieser Formel hervor, dass diese Korrektur, wenn  $a/L = 0,00365$ , ohne Bedeutung ist, selbst für den Wert für  $G$  bei  $\frac{a}{\lambda} = 0,01$ . —

In der obenstehenden Tabelle, No. VIII, stehen in Kolonne 1 die Werte für  $a/\lambda$  und in Kolonne 2 die Werte für  $L/\lambda$ . In den

Kolonnen 3 und 4 stehen die von GAEBDE beobachteten und von ihm ausgewerteten Werte für  $G/G_{1,0}$ , wo  $G_{1,0}$  den Wert für  $G$  bei  $a/\lambda = 0$  darstellt. In Kolonne 5 stehen die berechneten Werte für  $(G_1 + G_2)/G_{1,0}$ , und in Kolonne 6 die berechneten Werte für  $G_3/G_{1,0} = \frac{3\pi}{64} \left(\frac{a}{\lambda}\right)$ . In Kolonne 7 steht die Summe der berechneten Werte für:  $G_1/G_{1,0}$ ,  $G_2/G_{1,0}$  und  $G_3/G_{1,0}$ .

Aus diesen GAEBDE'schen Versuchsreihen, die leider nur bis  $a/\lambda = 0,035$  durchgeführt sind, scheint hervorzugehen, dass die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten am grössten ist, wenn das POISEUILLE-Glied weggelassen wird; dies ist auch in Übereinstimmung mit den Resultaten in der Tabelle No. VII, wie durch Vergleichung der Zahlen der Kolonnen 2 und 3 mit den Zahlen der Kolonnen 5, 6 und 9 erhellt.

Es darf aber bei dieser Vergleichung nicht übersehen werden, dass bei solchen sehr niedrigen Werten von  $a/\lambda$  die quantitative Bedeutung des Gliedes,  $G_3/G_{1,0}$ , sehr klein ist gegenüber der Bedeutung des Gliedes:  $\frac{(G_1 + G_2)}{G_{1,0}}$ . —

Andererseits ist es in Übereinstimmung mit der molekular-kinetischen Auffassung des KNUDSEN-Zustandes:  $(a/\lambda) \rightleftharpoons 0$ , dass die Entstehung einer hydrodynamischen Strömung erst dann möglich sein wird, wenn  $a/\lambda$  so gross geworden ist, dass die Gasmenge in einem Raumelement des Rohres als ein Kontinuum aufgefasst werden kann und also in Analogie mit einer Flüssigkeit theoretisch behandelt werden darf; wie bekannt, ist diese Analogie vollständig in dem MAXWELL'schen Zustand der Gase, d. h. wenn  $\frac{a}{\lambda} \rightleftharpoons \infty$ .

Es wäre ohne Zweifel von Interesse und von Bedeutung, auch zur Beleuchtung dieser Analogie, wenn das vorliegende Beobachtungsmaterial, besonders in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \text{ca. } 1$ , durch eine Reihe von Präzisionsmessungen für Helium und Neon, sowie auch für Wasserstoff und Stickstoff nach dem Vorbilde von

W. GAEDE und MARTIN KNUDSEN ergänzt werden könnte. Es wäre dann vielleicht möglich, weil nun eine quantitative Theorie für diese komplizierte Strömung in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , vorliegt, etwas näheres über diese Analogie zwischen Gasen und Flüssigkeiten zu erfahren; ausserdem wäre es für die Theorie von Bedeutung, wenn die Gleitung unabhängig von der Selbstdiffusionsströmung untersucht (z. B. nach der Ablenkungsmethode) und die Abhängigkeit der Selbstdiffusion von  $a/\lambda$  mit Hilfe der Isotopenmethode bestimmt würde. —

§ 12. Aus der abgeleiteten Formel für:  $G/G_{1,0} = G_{1,2,3}/G_{1,0}$ , mit oder ohne POISEUILLE-Glied, geht hervor, dass für  $x_1 = \frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$ :

$$G_{1,2,3} = G_{1,0} [1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 \ln x_1 + \alpha_3 \cdot x_1^2 + \alpha_4 \cdot x_1^2 \ln x_1 + \dots],$$

wo:

$$G_{1,0} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1\varrho} a^3 \cdot \frac{P_1 - P_2}{L}.$$

Hieraus erhellt, dass für  $x_1 = \frac{a}{\lambda} = 0$ :  $G_{1,2,3} = G_{1,0}$ , da  $\lim x_1^n \ln x_1 = 0$  für  $x_1 = 0$ , wenn  $n > 0$ . —

Weiter erhalten wir hieraus:

$$\frac{dG_{1,2,3}}{dx_1} = G_{1,0} [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 \ln x_1 + \dots],$$

und also für  $x_1 = 0$ :  $\frac{dG_{1,2,3}}{dx_1} = -\infty$ .

Der Wert,  $G'_{1,0}$ , für die Molekularströmung bei  $\frac{a}{\lambda} = 0$  ist für den Fall, dass die Bedingung:  $\frac{a}{L} \geq 0$ , nicht erfüllt ist, früher in mehreren Untersuchungen behandelt worden; im Allgemeinen ist man bei der Aufstellung der Formeln von der KNUDSEN'schen Formel<sup>1)</sup> für die Molekulardiffusion durch ein Loch in einer dünnen Platte, ausgegangen. —

1) MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. 4, B 28, S. 999, 1909.

S. DUSHMAN<sup>1)</sup> hat hierfür die Formel:

$$G'_{1,0} = G_{1,0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{8}{3} \left( \frac{a}{L} \right)}, \text{ angegeben.}$$

Diese Formel befriedigt die Grenzwerte, sowohl für die Molekulardiffusion durch ein Loch in einer dünnen Platte  $\left( \frac{a}{L} \Rightarrow \infty \right)$ , als auch für die reine Molekularströmung durch ein unendlich langes, zirkulares Rohr  $\left( \frac{a}{L} = 0 \right)$ .

P. CLAUSING<sup>2)</sup> hat, wenn  $\frac{a}{\lambda} = 0$ , dies Problem für alle Werte von  $\frac{a}{L}$  eingehend theoretisch untersucht, während E. H. KENNARD<sup>3)</sup> aus den von CLAUSING berechneten Werten für  $G'_{1,0}$  die folgende Interpolationsformel:

$$G'_{1,0} = G_{1,0} \cdot \frac{1 + \frac{5}{2} \left( \frac{a}{L} \right)}{1 + \frac{19}{3} \left( \frac{a}{L} \right) + \frac{20}{3} \left( \frac{a}{L} \right)^2}, \text{ abgeleitet hat.}$$

In dieser Formel ist, wie auch in der Formel von DUSHMAN:

$$G_{1,0} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \cdot \sqrt{10} \alpha^3 \cdot \frac{p_1 - p_2}{L}.$$

Die Interpolationsformel von CLAUSING-KENNARD ist jedenfalls für:  $\frac{a}{L} < \frac{2}{3}$ , sehr befriedigend und stimmt auch mit den Grenzwerten für:  $\frac{a}{L} = 0$  und  $\frac{a}{L} \Rightarrow \infty$ , überein. —

POLLARD und PRESENT<sup>4)</sup> haben für ein kreisförmiges, zylindrisches Rohr mit endlicher Länge,  $L$ , einen Ausdruck für  $G'_{1 \rightarrow 0}$

1) S. DUSHMAN: Vacuum Technique, S. 101, New York, 1949.

2) P. CLAUSING: Thesis, Leiden, § 23, S. 117, 1928, und Physica, Bd. 9, S. 65, 1929.

3) E. H. KENNARD: loc. cit. § 173, S. 308.

4) POLLARD and PRESENT: loc. cit. pag. 769.

in dem Zustande, charakterisiert durch:  $\lambda \gg L \gg a$ , theoretisch zu berechnen versucht.

Durch eine komplizierte Annäherungsrechnung haben sie die Formel:

$$G'_{1 \rightarrow 0} = G_{1,0} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{L} \right) - \left( 0,4764 + \frac{3}{4} \ln \frac{L}{2a} \right) \left( \frac{a}{\lambda} \right) \cdots \right],$$

abgeleitet. —

Da P. und P. aber der zusätzlichen Geschwindigkeit,  $v_x$ , der Moleküle, die von gegenseitigen Zusammenstößen im Inneren des Rohres kommen, nicht Rechnung getragen haben, hat das Resultat von P. und P. nur auf die molekulare Diffusionsströmung,  $G'_{1 \rightarrow 0}$ , und nicht auf die Gleitungsströmung,  $G'_{2 \rightarrow 0}$ , Bezug, und also auch nicht auf die Totalströmung:  $G_{1,2,3 \rightarrow 0} = (G'_1 + G'_2)_{\rightarrow 0}$ , im Zustande:  $\frac{a}{\lambda} \cong 0$ .

Aus dem Ausdruck von P. und P. für  $G'_{1 \rightarrow 0}$ :

$$G'_{1 \rightarrow 0} = G_{1,0} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{L} \right) - \left( 0,4764 + \frac{3}{4} \ln \frac{L}{2a} \right) \left( \frac{a}{\lambda} \right) \cdots \right],$$

ergibt sich für:  $\frac{a}{\lambda} = 0$  und  $\frac{a}{L} = 0$ :

$$\lim_{\rightarrow 0} \left( \frac{G'_{1 \rightarrow 0}}{G_{1,0}} \right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\rightarrow 0} \left[ \frac{1}{G_{1,0}} \cdot \frac{dG'_{1 \rightarrow 0}}{d \frac{a}{\lambda}} \right] = -\infty,$$

während für:  $\frac{a}{\lambda} = 0$  und  $0 < \frac{a}{L} \ll 1$ , der Ausdruck:  $G'_{1,0} = G_{1,0} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{L} \right) \right]$ , abgeleitet wird, so dass die Übereinstimmung mit den Resultaten von S. DUSHMAN und von CLAUSING-KENNARD nicht als befriedigend angesehen werden kann.

Wenn die von P. und P. vernachlässigte Gleitungsströmung,  $G'_{2 \rightarrow 0}$ , keinen Beitrag von Bedeutung zu der Totalströmung:  $G_{1,2 \rightarrow 0} = (G'_1 + G'_2)_{\rightarrow 0}$ , leisten sollte, erhält man hieraus, wenn:  $\frac{a}{\lambda} = x_1 = 0$  und  $0 < \frac{a}{L} \ll 1$ , den Grenzwert:

$$\lim_{x_1=0} \left[ \frac{1}{G_{1,0}} \cdot \frac{dG'_{1 \rightarrow 0}}{dx_1} \right] = - \left( 0,4764 + \frac{3}{4} \ln \frac{L}{2a} \right),$$

so dass für ein Rohr mit endlicher Länge, im Gegensatz zu meiner Formel für ein unendlich langes Rohr, d. h.  $\frac{a}{L} = 0$ , ein endlicher Wert für den Differentialkoeffizienten der Kurve  $\left( \frac{G'_1 + G'_2}{G_{1,0}}, \frac{a}{\lambda} \right)$  im Punkte,  $\frac{a}{\lambda} = x_1 = 0$ , erhalten wird.

Ob dies auch der Fall sein wird, wenn dem Einfluss des Gliedes,  $\frac{G'_{2 \rightarrow 0}}{G_{1,0}}$ , für  $\frac{a}{\lambda} \geq 0$  und bei  $0 < \frac{a}{L} \ll 1$ , Rechnung getragen wird, muss noch näher untersucht werden. —

Es ist durch die experimentelle Untersuchung von W. GAEDE<sup>1)</sup> über die Strömung von Wasserstoff durch einen rechteckulären Spalt und insbesondere durch die schönen Untersuchungen von R. E. H. RASMUSSEN<sup>2)</sup> über die Strömung der reinen Gase durch Ringspalten und andere Spalten bekannt, dass das Minimum der Kurve:  $G = \Phi \left( \frac{h}{\lambda} \right)$ , wo  $h$  die Höhe des Spaltes angibt, in der Nähe von:  $h/\lambda = \text{ca. } 1$ , liegt, während der Wert des Minimums:  $G_{\text{min.}} = \text{ca. } 0,50 \cdot G_{1,0}$ , beträgt. —

In einer folgenden Abhandlung werde ich nachweisen, dass diese experimentellen Resultate auch mit der hier angegebenen Theorie übereinstimmen, und dass die experimentell gefundenen Werte für die Lage und Grösse des Minimums in quantitativer Übereinstimmung sind mit der Entstehung der totalen, gemessenen Strömung durch Superposition der drei erwähnten, von einander unabhängigen Strömungen, nämlich 1° der Selbstdiffusionsströmung des Gases in dem laminar strömenden Gase (bezw. der Druckdiffusionsströmung des reinen Gases), 2° der Gleitungsströmung des reinen Gases und 3° der hydrodynamischen, laminaren Strömung von POISEUILLE. —

1) W. GAEDE: Ann. d. Phys, Bd. 41, S 305, 1913.

2) R. E. H. RASMUSSEN: loc. cit. S. 677—680.

### Zusammenfassung.

In § 1 wird eine Übersicht über die grundlegenden Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN (1909) über die stationäre Molekularströmung der reinen Gase durch zylindrische Rohre mit kreisförmigem Querschnitt (Radius  $R$ , Länge  $L$  und  $R/L \ll 1$ ) gegeben; auch der Übergang von der Molekularströmung in die laminare, hydrodynamische POISEUILLE-Strömung mit Gleitungskorrektur wird besprochen.

Ausserdem wird eine kurze Übersicht über die späteren experimentellen Arbeiten in diesem Gebiet von MARTIN KNUDSEN (1911), von W. GAEDE (1913), von H. ADZUMI (1939) und die theoretische Arbeit von W. G. POLLARD und R. D. PRESENT (1948) gegeben. —

Das Beobachtungsmaterial von MARTIN KNUDSEN für die reinen Gase,  $H_2$ ,  $O_2$  und  $CO_2$ , ist von Dr. MELKONIAN (1948) graphisch untersucht und von mir teilweise Neuberechnet worden; es kann mit guter Annäherung durch die dreigliedrige, semiempirische Interpolationsformel von MARTIN KNUDSEN:

$$G' = \frac{G}{p_1 - p_2} = {}_{1Q} \cdot \frac{Q_1}{p_1 - p_2} =$$

$$= {}_{1Q} \cdot T_1 = \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi \cdot \frac{R^3}{L} \sqrt{{}_{1Q}} \cdot \left[ \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda} + \frac{\beta_1 \cdot \frac{R}{\lambda}}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{R}{\lambda}} + \frac{1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{R}{\lambda}} \right], \quad (1)$$

in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , wiedergegeben werden.

$G$  ist die in der Zeiteinheit durchströmende Gewichtsmenge des reinen Gases, wenn die Druckdifferenz zwischen den Endflächen des Rohres ( $p_1 - p_2$ ) beträgt, und  ${}_{1Q}$  das spezifische Gewicht des Gases bei dem Druck, 1 Bar, und der Temperatur,  $t^\circ C$ . ist.

$\lambda$  ist die mittlere freie Weglänge in dem freien Gase, berechnet nach der Formel von S. CHAPMAN, d. h. aus  $p\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta}{V_{{}_{1Q}}}$ , wo  $\eta$  den Koeffizienten der inneren Reibung des Gases bezeichnet.

Alle Einheiten sind absolute Einheiten. —

Für  $R/\lambda = 0$  gilt die Formel von MARTIN KNUDSEN:

$$G_0 = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{R^3}{L} \sqrt{1\varrho} (p_1 - p_2) = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl}.$$

Dieser Ausdruck für die reine Molekularströmung, oder vielleicht besser »die reine Molekulardiffusion«, ist von MARTIN KNUDSEN unter der Voraussetzung, dass das Cosinusgesetz absolute Gültigkeit für die Zurückwerfung der Moleküle an der festen Rohrwand hat, theoretisch abgeleitet worden. Der theoretische Ausdruck,  $G_0$ , stimmt mit den experimentellen Resultaten der Präzisionsmessungen von MARTIN KNUDSEN und W. GAEDE in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , überein.

In diesen letzten Messungen waren die anwesenden Dämpfe durch Ausfrieren mit flüssiger Luft entfernt. —

MARTIN KNUDSEN hat nur den Grenzfall:  $R/\lambda = 0$ , seiner semi-empirischen Formel theoretisch untersucht. Weiter hat er festgestellt, dass die Interpolationsformel für  $G$ , in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, ein Minimum:  $G_{\min.} = \text{ca. } 0,95 \cdot G_0$  bei  $\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min.} = \text{ca. } 0,30$ , hat.

Die Frage der Entstehung und der theoretischen Berechnung dieses Minimums war bis heute noch ungeklärt geblieben.

Aus der dreigliedrigen, semi-empirischen Formel von MARTIN KNUDSEN erhellt, dass die Totalströmung  $G$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , aus drei Gliedern:  $G = G_3 + G_2 + G_1$ , zusammengesetzt werden kann; (vgl. auch § 2 und 3).

Wie bereits von MARTIN KNUDSEN angegeben, stellt das erste Glied:  $G_3 = G_0 \cdot \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda}$ , die laminare, hydrodynamische POISEUILLE-Strömung ohne Gleitungskorrektion dar. —

Das zweite Glied:  $G_2 = G_0 \cdot \frac{\beta_1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{R}{\lambda}} \cdot \left(\frac{R}{\lambda}\right)$ , wo  $\alpha_1 = \text{ca. } 3.10$

und  $\beta_1 = \text{ca. } 0.80 \cdot \alpha_1$ , repräsentiert die Gleitungsströmung, die

wegen der Gleitung des Gases an der festen Rohrwand entsteht, während das dritte Glied:  $G_1 = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \alpha_1 \cdot \frac{R}{\lambda}}$ , das bis jetzt stets in

der Theorie der POISEUILLE-Strömung übersehen worden ist, durch die Druckdiffusion in den *strömenden Lamellen* der laminaren, hydrodynamischen POISEUILLE-Strömung entsteht.

Während diese Druckdiffusion *nicht* in einem stillstehenden Gas mit konstanter Temperatur bestehen kann, d. h. nicht stabil ist, *ist dies wohl möglich in einem laminar strömenden Gas, worin ein Druckunterschied in der Richtung der Strömung herrscht*, sowie dies in der laminaren POISEUILLE-Strömung der Fall ist. —

In einem reinen Gas ist die Druckdiffusionsströmung,  $G_1$ , bestimmt durch den Selbstdiffusionskoeffizienten des reinen Gases,  $D_{11,p} = c_1 \cdot \bar{\Omega} \lambda$ , und es erhellt also hieraus, *dass der Selbstdiffusionskoeffizient eine messbare, physikalische Grösse ist*, und *nicht*, wie bisher angenommen (S. CHAPMAN, EARLE H. KENNARD u. A.), nur eine mathematische Hilfsgrösse ohne physikalischen Sinn. —

Da diese drei Strömungen:

- a) die laminare, rein hydrodynamische POISEUILLE-Strömung, ( $G_3$ ),
- b) die Gleitungsströmung, ( $G_2$ ), und
- c) die Diffusionsströmung ( $G_1$ ),

als unabhängig von einander, d. h. als einander nicht beeinflussend, angesehen werden können, kann die Totalströmung,  $G$ , durch Superposition dieser drei Strömungen berechnet werden.

Aus der semi-empirischen Formel von MARTIN KNUDSEN und aus der Untersuchung des KNUDSEN'schen Beobachtungsmaterials von Dr. E. MELKONIAN erhellt, dass mit grosser Annäherung die Totalströmung,  $G$ , reiner Gase geschrieben werden kann:

$$G = G_0 \cdot f\left(\frac{R}{\lambda}\right),$$

wo  $f\left(\frac{R}{\lambda}\right)$  eine eindeutige Funktion von  $\frac{R}{\lambda}$  ist. —

In § 2 und 3 wird theoretisch, aber nur annäherungsweise — u. a. der besseren Übersicht wegen — die Variation der drei Glieder mit  $R/\lambda$ , bzw. mit dem mittleren Druck:  $\bar{p} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ , untersucht.

Es stellt sich heraus, dass  $G$  bei konstanter Temperatur des Rohres,  $t^\circ\text{C}$ , annäherungsweise geschrieben werden kann:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} G &= G_3 + G_2 + G_1 = \\ &= \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{dN}{dl} \left[ \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} + \frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}} \right], \end{aligned} \right.$$

wo:

$$\frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \cdot \frac{dN}{dl} = G_0.$$

$m$  ist die Masse des Moleküls und  $\bar{\Omega}$  die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle bei der Temperatur,  $t^\circ\text{C}$ .

$N$  ist die Anzahl der Moleküle per  $\text{cm}^3$  und  $\frac{dN}{dl}$  der Dichtheits- oder Konzentrationsgradient. —

Das Glied:  $G_3 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1\varrho}{\eta} \cdot \frac{R^4}{L} \bar{p} (p_1 - p_2)$ , stellt die rein hydrodynamische, laminare POISEUILLE-Strömung dar. —

Für  $R/\lambda = 0$  wird  $G_3 = 0$ ; es muss aber theoretisch für wahrscheinlich erachtet werden, dass für  $R/\lambda \geq 0$  auch  $G_3 = 0$  ist.

Für  $R/\lambda \geq \text{ca. } 0,2$  muss aber nach den Beobachtungen angenommen werden, dass sich der Wert von  $G_3$  mit grosser Annäherung bereits in Übereinstimmung mit dem obengenannten theoretischen Wert befindet, der, wie bekannt, gültig ist für grössere Werte von  $R/\lambda$ ; dies erhellt u. a. aus der Lage und Grösse des beobachteten Minimums, bzw.  $\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\text{min.}}$  und  $G_{\text{min.}}$ .

Das Glied:  $G_2 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} = G_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}}$ , stellt die Gleitungsströmung dar.

Diese Strömung entsteht durch die Gleitung des Gases an der festen Wand, wenn das Cosinusgesetz für die Zurückwerfung der gegen die Wand stossenden Moleküle Gültigkeit besitzt.

Für  $R/\lambda = 0$  wird  $G_2 = 0$ , und für  $R/\lambda \geq 0$  wird:

$$G_{2 \rightarrow 0} = G_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2R}{\lambda} \cdot -$$

Für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  wird in Übereinstimmung mit den Beobachtungen:  $G_2 = \frac{\pi}{4} \cdot G_0 = \text{konstant}$ .

Da die theoretischen und beobachteten Werte für  $G_0$  und auch für  $G_2$  befriedigend übereinstimmen, kann angenommen werden, dass das Cosinusgesetz für die Zurückwerfung der Moleküle an der festen Wand Gültigkeit hat.

Das neue Glied, herrührend von der Druckdiffusion:

$$G_1 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}}$$

wird für:

$$\frac{R}{\lambda} = 0: G_{1,0} = G_0 = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \sqrt{1\varrho} \cdot R^3 \frac{p_1 - p_2}{L}$$

d. h. zu dem von MARTIN KNUDSEN und später von M. VON SMOLUCHOWSKI abgeleiteten, theoretischen Wert für die stationäre, reine Molekularströmung durch ein langes Rohr mit kreisförmigem Querschnitt,  $\pi R^2$ .

Für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$  wird:  $G_{1,\infty} = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} R^3 \frac{dN}{dl} \cdot \frac{\lambda}{2R} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot m \cdot \frac{dN}{dl} \pi R^2 = D_{11,p} \cdot m \cdot \frac{dN}{dl} \pi R^2$ , wo  $D_{11,\infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda$ , d. h. der Selbstdiffusionskoeffizient des reinen Gases in dem MAXWELL'schen Zustande des Gases, so wie dieser aus der einfachen kinetischen Theorie der Gase abgeleitet wird.

Es erhellt aus der theoretischen Annäherungsformel (2), dass diese der Form nach mit der semi-empirischen Formel von MARTIN KNUDSEN übereinstimmt.

Die numerischen Konstanten:  $\alpha_1 = 3,097$  und  $\beta_1/\alpha_1 = \text{ca. } 0,80$ , in der KNUDSEN'schen Formel sind in hinreichender Übereinstimmung mit den in der theoretischen Annäherungsformel (2) verwendeten Konstanten:  $\alpha_1 = 2$  und  $\beta_1/\alpha_1 = \frac{\pi}{4} = 0,785$ .

Beide Formeln (1) und (2) ergeben ein Minimum für  $G$ :  
 $G_{\min} = \text{ca. } 0,95 \cdot G_0$  bei  $\left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\min} = \text{ca. } 0,30$ .

Die Übereinstimmung zwischen den Formeln (1) und (2) und den Beobachtungen ist für  $R/\lambda \geq \text{ca. } 0,2$  für beide Formeln sehr befriedigend. Beide Formeln sind aber nicht ganz befriedigend in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , da die Abweichungen hier ca. 5 bis 10 % betragen.

In diesem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , ist nur die später folgende, exakte Ableitung befriedigend. —

Es erhellt weiter aus der theoretischen Annäherungsformel — und dies ergibt sich auch aus der KNUDSEN'schen semi-empirischen Formel — dass die Summe:

$$G_1 + G_2 = G_0 \cdot \frac{1 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}},$$

von  $G_0$  für  $\frac{R}{\lambda} = 0$  bis auf  $\frac{\pi}{4} \cdot G_0$  für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$  gleichmäßig *abnimmt*, woraus hervorgeht, dass das beobachtete Minimum seine Entstehung *nicht* dem Verlauf der Summe der zwei gaskinetischen Glieder,  $G_1$  und  $G_2$ , zu verdanken hat, sondern dadurch zustande kommt, dass das hydrodynamische Glied,  $G_3$ , welches proportional mit  $\frac{2R}{\lambda}$ , bzw.  $\bar{p}$ , *wächst*, zu der Summe,  $G_1 + G_2$ , die gleichmäßig mit  $\frac{2R}{\lambda}$ , bzw.  $\bar{p}$ , *abnimmt*, hinzukommt und bereits bei einem Wert von  $\frac{R}{\lambda} = \text{ca. } 0,2$  à  $0,3$  seinen vollen, theoretischen Wert:

$$G_3 = G_0 \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}, \text{ erreicht hat.}$$

In § 4 werden die gaskinetischen Glieder,  $G_1$  und  $G_2$ , und deren Verlauf mit  $R/\lambda$  näher besprochen. Das Gleitungsmitglied,  $G_2$ , wird näher untersucht in Verbindung mit dem vorliegenden Be-

obachtungsmaterial aus den Strömungsuntersuchungen und unter Zugrundelegung von anderen bekannten Untersuchungen über den Gleitungskoeffizienten. —

Die bekannten Methoden zur Bestimmung des Gleitungskoeffizienten können in zwei Hauptgruppen eingeteilt werden, nämlich die Gruppe:

a) welche die Methoden, worin ein Druckgradient in dem Gase vorhanden ist, umfasst; hierzu müssen die Durchströmungsmethoden gerechnet werden, z. B. die stationäre Strömung durch Rohre und andere enge Kanäle, wie auch die Methoden, welche die Bestimmung der Druckabhängigkeit des »Gesetz von Stokes für Gase« als Grundlage haben, während die zweite Gruppe:

b) die Methoden, worin kein Druckgradient von Bedeutung in dem Gase vorhanden ist, umfasst, z. B. die MAXWELL'sche Methode mit der in sich selbst schwingenden, zirkularen Planscheibe und die »Ablenkungs-Torsions-Methode«, worin z. B. der äussere Zylinder von zwei koaxialen, kreisförmigen Zylindern mit konstanter Geschwindigkeit um die gemeinschaftliche Achse rotiert, wodurch der innere Zylinder in Torsionsaufhängung bei jedem Druck eine stationäre Ablenkung erfährt. —

Verwendet man die Methoden der Gruppe a) zur Bestimmung des Gleitungskoeffizienten und wird das Druckdiffusionsglied vernachlässigt, wird der hieraus berechnete Wert des Gleitungskoeffizienten zu gross, insbesondere bei niedrigen Werten von  $R/\lambda$ .

Da der Wert der Konstante,  $k_2$ , in der Formel für den Gleitungskoeffizienten:  $\zeta = k_2 \cdot \lambda$ , ausserdem etwas mit  $R/\lambda$  variiert, ist leider der Wert des vorliegenden Observationsmaterials zur Bestimmung des Gleitungskoeffizienten sehr zweifelhaft.

Eine systematische, experimentelle Untersuchung über den Gleitungskoeffizienten und dessen Abhängigkeit von  $\frac{R}{\lambda}$  nach den verschiedenen Methoden würde von gaskinetischer Bedeutung sein.

Leider ist es aber noch nicht gelungen eine einwandfreie, theoretische Ableitung des Wertes von  $\zeta = k_2 \cdot \lambda$ , bezw.  $k_{2,\infty}$ , in dem MAXWELL'schen Gebiet der Gase zu erreichen, weil die mathematischen Schwierigkeiten zu gross sind.

Ferner wird in § 4 auch das Diffusionsglied,  $G_1$ , näher untersucht und die Grössenordnung des Selbstdiffusionskoeffizienten,

$D_{11,p}$ , mit Hilfe der Präzisionsmessungen mit Wasserstoff (1911) von MARTIN KNUDSEN bestimmt.

In dieser Verbindung würden neue Messungen über die Variation des Selbstdiffusionskoeffizienten mit  $R/\lambda$ , bzw.  $\bar{p}$ , z. B. nach der Isotopen-Methode, von wesentlichem, gaskinetischem Interesse sein, weil sich diese Variation als kompliziert erweisen könnte, auch in Verbindung damit, dass der angenäherte, theoretische Ausdruck:  $D_{11,\infty} = \frac{1}{3} \cdot \bar{\Omega} \lambda$ , sich nicht ganz in Übereinstimmung mit dem exakten Ausdruck für den MAXWELL'schen Zustand der Gase befindet; wie bekannt, ist der exakte Ausdruck hierfür:

$$D_{11,\infty} = \frac{6}{5} \cdot \frac{\eta}{\rho} = 0,60 \cdot \bar{\Omega} \lambda,$$

wenn die gegenseitigen Zusammenstöße der Moleküle als elastische Stöße aufgefasst werden können.

In § 5 wird die exakte Theorie der reinen Molekularströmung behandelt und die Variation der Strömungsgeschwindigkeit,  $v$ , über einen kreisförmigen Querschnitt bestimmt. Es zeigt sich, dass diese Variation von  $v$  auf einfache Weise mit Hilfe der vollständigen elliptischen Integralen 1<sup>ster</sup> und 2<sup>ter</sup> Gattung dargestellt werden kann.

Ausserdem wird die an die Wand übertragene Bewegungsgrösse gaskinetisch berechnet; ferner wird der Transport von Energie und Bewegungsgrösse durch den Querschnitt,  $\pi R^2$ , des Rohres in der Molekularströmung untersucht.

Für diese letzten Berechnungen ist es aber notwendig, ein Verteilungsgesetz für die molekularen Geschwindigkeiten der Gasmoleküle einzuführen, während dies nicht nötig ist für die Bestimmung der durchströmenden Menge,  $G_0$ .

In § 6 und § 7 wird der Einfluss vereinzelter, gegenseitiger Zusammenstöße der Moleküle im Inneren des Rohres auf die Molekularströmung untersucht.

Bei der Berechnung wird vorausgesetzt, dass alle gegenseitigen Zusammenstöße gleichwertig sind, und dass die von Zusammenstößen in einem Volumenelement kommenden Moleküle

gleichmässig in alle Richtungen ausgestrahlt werden (elastische Stösse).

Es wird weiter angenommen, dass die von gegenseitigen Zusammenstössen kommenden Moleküle im Mittel eine zusätzliche Geschwindigkeit, bezw. gemeinschaftliche Massengeschwindigkeit,  $v_x$ , in der Richtung der Achse haben können. Wie bekannt, wird dies keinen Einfluss auf die Stosszahl der Moleküle gegen ein Element  $dS'$  der Rohrwand haben, weil diese, wie auch die Richtung des Druckgefälles, parallel mit der Richtung der Achse verläuft.

Auch in diesem Falle wird, wie in der exakten Theorie der reinen Molekularströmung, die durchströmende Gasmenge,  $mq = G$ , durch Addition der einzelnen, durch den Querschnitt des Rohres strömenden Moleküle berechnet; ferner wird mit Hilfe der an die Wand übertragenen Bewegungsgrösse,  $v_x$ , bestimmt.

Für den Zustand,  $\frac{R}{\lambda} \cong 0$ , worin die laminare, hydrodynamische Strömung noch nicht von Bedeutung geworden ist, ergibt sich:

$$v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} \cdot R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl} .-$$

Für:  $\frac{R}{\lambda} \cong \infty$ , ergibt sich auf ähnliche Weise:

$$v_{x \rightarrow \infty} = (2 - \alpha') \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl} = k_{2,\infty} \cdot \frac{\pi}{8} R \bar{\Omega} \cdot \frac{dN}{Ndl} .$$

Durch den Wert für  $v_x$  ist die Gleitungsströmung,  $mq_2 = G_2$ , bestimmt. —

Die Anzahl der durchströmenden Moleküle besteht, so lange die hydrodynamische Strömung:  $q_3$ , noch nicht eingesetzt hat, aus zwei Gliedern, nämlich der Anzahl herrührend von der Selbstdiffusions-, bezw. Druckdiffusionsströmung,  $q_1$ , und der Anzahl herrührend von der Gleitungsströmung,  $q_2$ , die durch  $v_x$  bestimmt ist.

Es ergibt sich:

$$q_1 = \int \frac{1}{2\pi} \bar{\Omega} \frac{dN}{dx} dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{r_1}{\lambda \sin \theta}} \right] d\varphi,$$

woraus,

$$\text{für } \frac{R}{\lambda} = 0: q_{1,0} = \frac{2}{3} \bar{\Omega} R \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2,$$

bezw.

$$\text{für } \frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty: q_{1,\infty} = \frac{1}{3} \bar{\Omega} \lambda \cdot \frac{dN}{dl} \cdot \pi R^2;$$

und:

$$q_2 = \int \frac{1}{2\pi} N v_x dS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ 1 - e^{-\frac{r_1}{\lambda \sin \theta}} \right] d\varphi.$$

Hierzu kommt, wenn  $\frac{R}{\lambda}$  grösser wird, die Anzahl, herrührend von dem POISEUILLE-Glied, für welches, jedenfalls bei grösseren Werten von  $\frac{R}{\lambda}$ , der Ausdruck:

$$q_3 = q_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}, \text{ Gültigkeit hat. —}$$

Verwendet man in den Formeln für  $q_1$  und  $q_2$  die Annäherung:

$\left( \frac{r_1}{\sin \theta} \right)_{\text{Mitt.}} = 2R$ , welche Annäherung durch Mittelwertbildung von  $\left( \frac{r_1}{\sin \theta} \right)$  in dem Gebiet:  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$ , abgeleitet werden kann, ergibt sich:

$$\left[ 1 - e^{-\frac{r_1}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\lambda}} \right] \simeq \left[ 1 - e^{-\frac{2R}{\lambda}} \right] \simeq \frac{\frac{2R}{\lambda}}{1 + \frac{2R}{\lambda}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2R}}.$$

Durch diese Annäherung können die Werte für  $m q_1 = G_1$  und  $m q_2 = G_2$ , die in der Annäherungsformel (2) vorkommen, welche praktisch gesprochen mit der semi-empirischen Formel (1) von MARTIN KNUDSEN übereinstimmt, auf einfache Weise abgeleitet werden.

In § 8 werden die in den Ausdrücken für  $q_1$  und  $q_2$  vorkommenden, bestimmten Integrale näher untersucht, da diese zu bestimmten Integralen von der Gattung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \cdot \sin^m \theta \cdot e^{-\frac{\alpha}{\sin \theta}} d\theta,$$

reduziert werden können.

Diese bestimmten Integrale, die von Bedeutung für den Zustand:  $\alpha = \frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$ , sind, können in konvergenten Reihen nach  $\alpha$  entwickelt werden unter Verwendung des Integrallogarithmus und der bekannten Reihenentwicklung für  $\arcsin \alpha$ .

Für  $\alpha \rightarrow 0$  erhält man Reihen nach  $\alpha$ , die schnell konvergieren.

Für grössere Werte von  $\alpha$ , d. h.  $\alpha > 4$ , können auch brauchbare Ausdrücke für diese Integrale abgeleitet werden.

Die vorkommenden Integrale und Ausdrücke können im Allgemeinen mit Hilfe von zwei Funktionen:  ${}_1P_1(\alpha)$  und  ${}_1N_1(\alpha)$ , ausgedrückt werden, und diese zwei Funktionen:

$$\begin{aligned} {}_1P_1(\alpha) = & 1 - 0,274452 \cdot x_1 + 1,726943 \cdot x_1 \log_{10} x_1 - 0,533333 \cdot x_1^2 + \\ & + 0,142663 \cdot x_1^3 - 0,143911 \cdot x_1^3 \log_{10} x_1 + 0,00237535 \cdot x_1^5 - \\ & - 0,00299816 \cdot x_1^5 \log_{10} x_1 + \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}_1N_1(\alpha) = & 1 - \frac{4}{3} \cdot x_1 + 0,682968 \cdot x_1^2 - 1,151293 \cdot x_1^2 \log_{10} x_1 + \\ & + 0,0534417 \cdot x_1^4 - 0,0959441 \cdot x_1^4 \log_{10} x_1 + \\ & + 0,00388264 \cdot x_1^6 - 0,00599631 \cdot x_1^6 \log_{10} x_1 + \dots \end{aligned}$$

worin:

$$x_1 = \frac{R}{\lambda} = \alpha,$$

können in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \alpha = \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden. —

In § 9 und 10 werden die exakten Ausdrücke für  $mq_1 = G_1$  (das Selbstdiffusionsglied) und  $mq_2 = G_2$  (das Gleitungsmitglied)

für ein langes Rohr mit Querschnitt,  $\pi R^2$ , berechnet; die Voraussetzung für die Gültigkeit der Formeln ist:  $R/L \ll 1$ . —

Für diesen Fall wird gefunden:

$$G_1 = G_{1,0} \cdot {}_1P_1\left(\frac{R}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad G_2 = G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{{}_1P_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)}{{}_1N_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)} \left[1 - {}_1N_1\left(\frac{R}{\lambda}\right)\right],$$

wo:

$$G_{1,0} = G_0 = \frac{2\pi}{3} m \bar{\Omega} \cdot R^3 \cdot \frac{dN}{dl} \cdot -$$

Es muss aber hierzu bemerkt werden, dass der Ausdruck für  $G_2$  nur gültig ist für:  $R/\lambda \rightarrow 0$ , d. h.  $\frac{R}{\lambda} < \text{ca. } 0,35$ , weil es noch nicht gelungen ist, die theoretische Variation von  $v_x$  mit  $R/\lambda$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen, da der Grenzwert  $v_{x \rightarrow \infty}$  für  $\frac{R}{\lambda} \rightarrow \infty$  noch nicht theoretisch einwandfrei abgeleitet worden ist. Es ist aber möglich nachzuweisen, dass:

$$v_{x \rightarrow \infty} = k_2 \cdot \frac{\pi}{8} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl}.$$

Da der exakte, theoretische Grenzwert von  $k_2$  für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  leider fehlt, habe ich den experimentellen Wert:  $k_{2,\infty} = \text{ca. } \frac{4}{3}$  für  $R/\lambda \rightarrow \infty$  verwendet, woraus:

$$v_{x \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{6} \bar{\Omega} R \cdot \frac{dN}{Ndl}.$$

Für  $v_{x \rightarrow 0}$  ist aber theoretisch abgeleitet:

$$v_{x \rightarrow 0} = \frac{\pi}{4} \bar{\Omega} R \frac{dN}{Ndl},$$

so dass die Variation von  $k_2$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , ca. 50 % beträgt.

Die Variation von  $v_x$ , bzw. von  $k_2$ , mit  $R/\lambda$  in dem ganzen

Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , kann aber semi-empirisch festgestellt werden, da man mit Annäherung annehmen darf, dass die Druckvariation von  $k_2$  der Form nach in Übereinstimmung ist mit der Variation, die experimentell für das »Gesetz von Stokes für Gase« in dem Gebiet:

$0 \leq \frac{a}{\lambda} \leq \infty$ , gefunden worden ist (MARTIN KNUDSEN und SOPHUS WEBER, 1912).

Obwohl die Variation mit dem Druck,  $\bar{p}$ , des Gesetzes von Stokes auch nicht ganz unabhängig ist von der Druckdiffusion in dem umgebenden Gase, kann man, ohne grosse Fehler zu machen, annehmen, dass:

$$k_2 = A \left[ 1 + \frac{B}{A} \cdot e^{-c_2 \cdot \frac{R}{\lambda}} \right] = k_{2,\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-c_2 \cdot \frac{R}{\lambda}} \right],$$

wo  $A = k_{2,\infty} = \text{ca. } \frac{4}{3}$ ,  $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$ , während  $c_2 = 2$  in dem Gebiet:  $\frac{R}{\lambda} \leq 0,35$ , eine befriedigende Übereinstimmung mit der theoretischen Formel:

$$G_2 = G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_1N_1} \left[ 1 - {}_1N_1 \right],$$

die gültig ist in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq 0,35$ , ergibt.

In § 11 werden die theoretischen Resultate und Formeln mit dem besten vorliegenden Beobachtungsmaterial, als welches die Messungen mit  $\text{CO}_2$  von MARTIN KNUDSEN gewählt sind, verglichen; das Beobachtungsmaterial für  $\text{CO}_2$  ist Neuberechnet und nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen.

Es erhellt, dass die Übereinstimmung zwischen dem beobachteten Material und den Resultaten der Theorie sehr zufriedenstellend ist, so dass angenommen werden darf, dass die entwickelte Theorie befriedigend ist, und dass die totale Strömung,  $G$ , eines reinen Gases durch ein langes zylindrisches Rohr mit kreisförmigen Querschnitt,  $\pi R^2$ , in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , aus drei von einander unabhängigen Strömungen zusammengesetzt ist, nämlich:

- 1° Der gaskinetischen Selbstdiffusions- bzw. Druckdiffusionsströmung:  $G_1$  · —
- 2° Der gaskinetischen Gleitungsströmung:  $G_2$  · —
- 3° Der hydrodynamischen, laminaren POISEUILLE-Strömung:  $G_3$  · —

Da die theoretische Summe von  $G_1$  und  $G_2$  (vgl. Tabelle No. VII, Seite 108) eine gleichmässig *abnehmende* Strömungsmenge ( $G_1 + G_2$ ) mit wachsenden Werten von  $R/\lambda$ , bzw. mit wachsendem Druck,  $\bar{p}$ , ergibt, während die reine, laminare POISEUILLE-Strömung eine gleichmässig *wachsende* Strömungsmenge,  $G_3$ , mit wachsenden Werten von  $R/\lambda$  ergibt, erhellt hieraus, dass die Ursache für die Entstehung des Minimums nicht zu finden ist in dem Verlauf der Summe aus den zwei gaskinetischen Gliedern,  $G_1$  und  $G_2$ , sondern darin, dass die hydrodynamische, laminare POISEUILLE-Strömung bereits bei kleineren Werten von  $R/\lambda$ , d. h.  $R/\lambda = \text{ca. } 0,2 \text{ à } 0,3$ , voll entwickelt ist und ihren theoretischen Wert:  $G_3 = G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{64} \cdot \frac{R}{\lambda}$ , erreicht hat.

Aus den Tabellen geht hervor, dass die beobachteten und theoretischen Werte für die Grösse und Lage des Minimums *genau* übereinstimmen. Diese sind:

$$G_{\text{min.}} = 0,925 \cdot G_{1,0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{R}{\lambda}\right)_{\text{min.}} = 0,31.$$

Dies Resultat ist auch in Übereinstimmung mit den von Dr. MELKONIAN nach graphischer Auswertung aus dem vollständigen Beobachtungsmaterial von MARTIN KNUDSEN gefundenen Werten.

Ferner werden, in Verbindung mit den Zahlen in der Tabelle VII die beobachteten und berechneten Werte von  $G = G_1 + G_2 + G_3$  in dem ganzen Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \infty$ , verglichen, und es stellt sich heraus, dass die Übereinstimmung, auch in dem Gebiet:  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \text{ca. } 0,2$ , sehr befriedigend ist.

Es erhellt u. a., dass die Summe  $(G_1 + G_2)/G_{1,0}$  von 1 für

$R/\lambda = 0$ , auf  $\frac{\pi}{4} = 0,785$  für  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , gleichmässig abnimmt. Dieser Wert von 0,785 für  $R/\lambda \rightarrow \infty$ , entspricht einem Wert von  $k_{2,\infty} = \text{ca. } \frac{4}{3}$ .

Ausserdem erhellt aus den Präzisionsmessungen für  $H_2$  von MARTIN KNUDSEN (1911) und insbesondere aus den Präzisionsmessungen von W. GAEDE (1913) in dem Gebiet:  $R/\lambda \geq 0$ , dass die POISEUILLE-Strömung in diesem Gebiet, d. h.  $0 \leq \frac{R}{\lambda} \leq \text{ca. } 0,04$ , nach aller Wahrscheinlichkeit noch nicht eingesetzt hat, wie man auch theoretisch erwarten würde, während man, wie es aus der Grösse und Lage des Minimums hervorgeht, annehmen muss, dass die reine POISEUILLE-Strömung ihren vollen theoretischen Wert,  $G_3 = G_{1,0} \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot \frac{2R}{\lambda}$ , bereits bei dem Wert von  $\frac{R}{\lambda} = 0,20$  à 0,30 erreicht hat.

In § 12 wird der experimentelle und theoretische Verlauf der Molekularströmung,  $G'_1$ , in der Umgebung des Punktes:  $R/\lambda = 0$ , näher beleuchtet.

---

Zum Schluss kann noch einmal die Aufmerksamkeit darauf gelenkt werden, dass der Selbstdiffusionskoeffizient eines reinen Gases eine messbare, physikalische Grösse ist, obwohl es vielleicht schwierig sein wird, diese Grösse mit Hilfe der Strömung reiner Gase durch Rohre mit befriedigender Genauigkeit zu bestimmen.

Eine weitere Vergleichung der Theorie mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial für rechteckige Spalten und kreisförmige Ringspalten (R. E. H. RASMUSSEN, 1937) wird wahrscheinlich eine grössere Genauigkeit in der Bestimmung des Selbstdiffusionskoeffizienten ergeben, und vielleicht auch nähere Aufschlüsse darüber, wann und auf welche Weise die laminare, hydrodynamische Strömung von POISEUILLE einsetzt.

In dieser Verbindung kann noch mitgeteilt werden, dass die von R. E. H. RASMUSSEN gefundenen Werte für die Grösse und Lage des Minimums für Ringspalten und rechteckige Spalten mit Höhe,  $h$ :

$$G_{\min.} = \text{ca. } 0,50 \cdot G_{1,0} \quad \text{bei} \quad \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\min.} = \text{ca. } 1,$$

in guter Übereinstimmung mit der hier entwickelten Theorie sind, und hierdurch auch ihre einwandfreie Erklärung erhalten.

---

Auch bei dieser Gelegenheit möchte ich der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds meinen aufrichtigen Dank für gewährte Stütze aussprechen. —

---